

Übungsaufgaben zu Statistik II

**Prof. Dr. Irene Rößler
Prof. Dr. Albrecht Ungerer**

**Die Kapitel beziehen sich auf das Buch:
Rößler/Ungerer (2016): Statistik für
Wirtschaftswissenschaftler
Springer Gabler**

4 Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

4.1 Übungsaufgaben zum Kapitel Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariablen und Verteilungen

ÜA 1.: Gegeben sei der Beispieldatensatz FS, Seite 3, mit der Verteilung der Mathenoten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit *zwei* Studierenden sowie den zugehörigen Erwartungswert und die Varianz.

ÜA 2.: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% hat ein Studierender der Fakultät Technik einer DHBW die Mathenote 1. Es wird ein Test auf diese Studierenden mit Mathenote 1 angeboten. Der Statistikprofessor behauptet, dass dieser Test zu 98% ein verlässliches Ergebnis bei Studierenden mit Mathenote 1 liefert. Aber auch bei 3% der Studierenden, die nicht die Mathenote 1 haben, wird die Mathenote 1 angezeigt.

Ein Studierender wird mit dem Ergebnis Mathenote 1 getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat dieser Studierende tatsächlich eine 1?

ÜA 3.: Gegeben sei der Beispieldatensatz FS, Seite 3, mit der Verteilung der Ausgaben für Kopien (Buch, Seite 25 u. 27):

Ausgaben von ... bis unter ... €	h_j	f_j	F_j
0 – 15	5	0,2	0,2
15 – 25	8	0,32	0,52
25 – 35	5	0,2	0,72
35 – 50	5	0,2	0,92
50 – 75	2	0,08	1
Σ	$25=n$	1	–

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Studierenden zu ziehen, dessen Ausgaben für Kopien weniger als 35€, 15 € oder mehr, zwischen 15 und unter 50€ betragen.

4.2 Übungsaufgaben zum Kapitel Stichprobenfunktionen und die Normalverteilung als Stichprobenverteilung

ÜA 4.: Die Grundgesamtheit von X „Ausgaben für Kopien pro Semester“ sei normalverteilt mit $E(X) = \mu = 27$ und $Var(X) = \sigma^2 = 100$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, zufällig *einen* Studierenden zu ziehen, dessen Ausgaben für Kopien 37€ oder weniger, mehr als 12 €, zwischen 7 und 47€ betragen.

ÜA 5.: In einer Grundgesamtheit von $N = 1000$ Studierenden haben 400 Studierende die Mathenote 3. Anhand einer Stichprobe (m.Z.) mit $n = 50$ soll der wahre Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 geschätzt werden.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe

- a) der gleiche Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 vorliegt wie in der Grundgesamtheit
- b) der Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ zwischen 30% und 50% liegt.

Hinweis: Verwenden Sie die Binomialverteilung und die Datei zgs.xlsm.

ÜA 6.: In einer normalverteilten Grundgesamtheit von $N = 1000$ Studierenden betragen die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien pro Semester $\mu = 27\text{€}$ bei einer Standardabweichung von $\sigma = 10\text{€}$. Es wird eine Zufallsstichprobe (m.Z.) im Umfang von $n = 50$ ($n = 100$) gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien

- a) 28€ oder weniger
- b) mehr als 25,5€
- c) zwischen 24€ und 30€
betragen.

ÜA 7.: Aus einer großen Grundgesamtheit mit 40% Studierenden mit „Mathenote 3“ werden zufällig 50 Studierende gezogen. Bestimmen Sie mit dem Grenzwertsatz von Moivre und Laplace die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Stichprobe zwischen 17 und 23 Studierende mit „Mathenote 3“ enthalten sind.

ÜA 8.: Für alle Studierende an allen DHBWs betragen die pro-Kopf-Ausgaben für Kopien pro Semester $\mu = 27$ bei $\sigma = 10$. Prüfen Sie mit dem Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy, ob ein Stichprobenergebnis von $\bar{x} = 28\text{€}$ bei $n = 1000$ möglich ist.

5 Übungsaufgaben zur induktiven Statistik

5.1 Übungsaufgaben zum Kapitel Grundlagen des Schätzens und Testens

ÜA 9.: Aus einer großen Grundgesamtheit mit 40% Studierenden mit „Mathenote 3“ werden zufällig 50 Studierende gezogen.

Bestimmen Sie – vor der Stichprobenanalyse – das Intervall, in dem die Zahl der Studierenden mit „Mathenote 3“ höchstwahrscheinlich liegen wird. Mit „höchstwahrscheinlich“ setzen wir einen Sicherheitsgrad von 95,45%, d.h. $(1 - \alpha) = 0,9545$ voraus.

ÜA 10.: Aus einer großen Grundgesamtheit mit den durchschnittlichen Ausgaben für Kopien $\mu = 27$ und der Standardabweichung $\sigma = 10$ werden zufällig 50 Studierende gezogen.

Bestimmen Sie – vor der Stichprobenanalyse – das Intervall, in dem die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien höchstwahrscheinlich liegen werden (d.h. $(1 - \alpha) = 0,9545$).

5.2 Übungsaufgaben zum Kapitel Schätzverfahren

ÜA 11.: An einer Fakultät der DHBW seien 1 000 Studierende. Der Dekan der Fakultät möchte wissen, wie viele der Studierenden die Mathenote 3 haben. Dazu wird eine Stichprobe von 50 Studierenden gezogen und die Anzahl derjenigen erfasst, die die Mathenote 3 haben, mit dem Ergebnis: 20 Studierende haben die Mathenote 3.

Wie groß ist der Anteil der Studierenden mit der Mathenote 3 in der Grundgesamtheit bei einem Sicherheitsgrad von $(1 - \alpha) = 0,9545$?

ÜA 12.: An einer DHBW am Standort XY seien 4 000 Studierende. Eine Stichprobe im Umfang von 500 Studierenden ergibt, dass 190 die Mathenote 3 haben.

Mit welcher Sicherheitswahrscheinlichkeit liegt an dem betrachteten Standort der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 im Intervall $[36\%, 40\%]$?

ÜA 13.: An einer Fakultät der DHBW seien 1 000 Studierende. Man möchte wissen, wie hoch die pro-Kopf-Ausgaben für Kopien im Semester sind. Dazu wird eine Stichprobe von 50 Studierenden gezogen mit dem Ergebnis: $\sum x_i = 1350$ und $\sum x_i^2 = 41450$.

Wie groß sind die pro-Kopf-Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit bei einem Sicherheitsgrad von $(1 - \alpha) = 0,9545$?

ÜA 14.: An einer DHBW am Standort XY seien 4 000 Studierende. Eine Stichprobe von 1 000 Studierenden ergibt für die Kopierausgaben den Mittelwert 27,4€ und die Standardabweichung $s = 8€$.

Mit welcher Sicherheitswahrscheinlichkeit liegen die durchschnittlichen Kopierausgaben der Studierenden an dem Standort im Intervall $[27€; 27,8€]$?

5.2.1 Übungsaufgaben zur Zufallsstichprobenplanung und -auswertung bei einfacher Zufallsauswahl

ÜA 15.: Aus einer Pilotstudie von Studierenden an der DHBW seien der Anteil $\pi' = 0,4$ der Studierenden „mit Mathenote 3“ bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 0,1 (bzw. 0,05) nicht überschritten werden darf.

ÜA 16.: Über den Anteil π' der Studierenden „mit Mathenote 3“ sei nichts bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 0,1 (bzw. 0,05) nicht überschritten werden darf.

ÜA 17.: Aus einer Pilotstudie von Studierenden an der DHBW seien das arithmetische Mittel $\mu' = 27$ und die Varianz $\sigma'^2 = 100$ der Kopierausgaben bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 2€ (bzw. 1€) nicht überschritten werden darf.

- ÜA 18.: Aus einer Pilotstudie von Studierenden an der DHBW seien das arithmetische Mittel $\mu' = 27$ und die Varianz $\sigma'^2 = 100$ der Kopierausgaben bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 5% (bzw. 2%) nicht überschritten werden darf.
- ÜA 19.: Aus einer Stichprobe von 200 Studierenden an der DHBW seien der Anteil $p = 0,4$ der Studierenden „mit Mathenote 3“ bekannt. Bestimmen Sie den absoluten und prozentualen Stichprobenfehler (m.Z.) bei einer einfachen Zufallsstichprobe (Konfidenzniveau 95,45%).
- ÜA 20.: Aus einer Stichprobe von 200 Studierenden an der DHBW erhält man für die Kopierausgaben: $\sum x_i = 5400$ und $\sum x_i^2 = 165700$. Bestimmen Sie den absoluten und prozentualen Stichprobenfehler (m.Z.) für die durchschnittlichen Kopierausgaben bei einer einfachen Zufallsstichprobe (Konfidenzniveau 95,45%).
- ÜA 21.: Es wird behauptet, 40% der Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs haben die Mathenote 3. Wir überprüfen die Behauptung durch Zufallsstichproben vom Umfang $n = 100$ ($n = 400$) und erhalten jeweils $p = 0,35$. Ist die Behauptung bei einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha) = 0,9545$ haltbar?
- ÜA 22.: Es wird behauptet, Studierende der Fakultät Wirtschaft der DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27€ für Kopien aus bei einer Standardabweichung von 10€. Wir überprüfen die Behauptung durch Zufallsstichproben vom Umfang $n = 100$ ($n = 500$) und erhalten jeweils $\bar{x} = 28$. Ist die Behauptung bei einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha) = 0,9545$ haltbar?

5.2.2 Übungsaufgaben zur Zufallsstichprobenplanung und -auswertung bei geschichteter Zufallsauswahl

- ÜA 23.: Aus einer früheren Erhebung zu den Ausgaben für Kopien pro Semester bei Studierenden an DHBWs hat man folgende Daten als Auswahlgrundlage (N_h stabil, keine Schichtspringer):

Schicht Nr.	Anzahl der Studierenden (Tsd.)	Gesamtausgaben für Kopien je Schicht (Tsd. €)	Summe der quadrierten Einzelausgaben je Schicht (Tsd. € ²)
1	4	88	2000
2	3	96	3096
3	1	32	1536

Eine neue Zufallsstichprobe ist geplant. Berechnen Sie den notwendigen Stichprobenumfang für die durchschnittlichen Kopierausgaben bei einfacher und proportional geschichteter Zufallsauswahl (m.Z.), wenn der Stichprobenfehler bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45% nicht höher als 2% sein soll.

ÜA 24.: Fortsetzung der ÜA 23:

Aus einer Zufallsauswahl zu den Ausgaben für Kopien pro Semester bei Studierenden an DHBWs hat man folgendes Ergebnis:

Schicht Nr.	Anzahl der Studierenden	Gesamtausgaben für Kopien je Schicht (€)	Summe der quadrierten Einzelausgaben je Schicht (€ ²)
1	515	11 443	262 533
2	386	12 432	403 597
3	129	4 141	199 835

Schätzen Sie die durchschnittlichen Kopierausgaben eines Studierenden pro Semester, den absoluten und prozentualen Zufallsfehler und das Konfidenzintervall bei einfacher und proportional geschichteter Zufallsauswahl (m.Z.) und einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45%.

5.3 Übungsaufgaben zum Kapitel Testverfahren

ÜA 25.: 40% der Studierenden an DHBWs haben die Mathenote 3. Eine Stichprobe von 200 Studierenden der Fakultät Wirtschaft ergab 90 Studierende mit der Mathenote 3. Prüfen Sie anhand eines Hypothesentests in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$ die Hypothese: Unter den Studierenden der Fakultät Wirtschaft gibt es mehr Studierende mit Mathenote 3 als in anderen Fakultäten. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis grafisch für die Stichprobenverteilung $f(p|H_0)$.

ÜA 26.: Studierende an DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27€ für Kopien aus bei einer Streuung von $\sigma = 10€$. Eine Stichprobe von 400 Studierenden der Fakultät Technik ergab durchschnittliche Kopierausgaben von $\bar{x} = 26€$. Prüfen Sie anhand eines Hypothesentests in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$ die Hypothese: Studierende der Fakultät Technik geben im Durchschnitt pro Semester weniger für Kopien aus als Studierende anderer Fakultäten. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis grafisch für die Stichprobenverteilung $f(\bar{x}|H_0)$.

ÜA 27.: Überprüfen Sie die Behauptung der ÜA 21: „40% der Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs haben die Mathenote 3“ mit einem Hypothesentest in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$ durch die Zufallsstichprobe im Umfang $n = 100$ mit dem Ergebnis $p = 0,35$.

ÜA 28.: Überprüfen Sie die Behauptung der ÜA 22: „Studierende der Fakultät Wirtschaft der DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27€ für Kopien aus bei einer Standardabweichung von 10€“ mit einem Hypothesentest in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$ durch die Zufallsstichprobe im Umfang $n = 500$ mit dem Ergebnis $\bar{x} = 28$.

ÜA 29.: Der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der DHBW Stuttgart (π_1) ist größer als der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der DHBW Mannheim (π_2). Die Überprüfung erfolgt durch zwei Zufallsstichproben mit $n_1 = 380$ und $n_2 = 400$ und den Ergebnissen: $p_1 = 0,43$ und $p_2 = 0,37$. Führen Sie einen Hypothesentest in fünf Schritten durch bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$.

Hinweis: Testfunktion und Testverteilung:

$$T = \frac{P_1 - P_2}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 P_1 (1 - P_1) + n_2 P_2 (1 - P_2)}{n_1 + n_2 - 2}.$$

ÜA 30.: Studierende der DHBW Mannheim geben pro Semester weniger für Kopien aus (μ_1) als Studierende der DHBW Stuttgart (μ_2) bei gleicher Varianz. Die Überprüfung erfolgt durch zwei Zufallsstichproben mit jeweils $n_1 = n_2 = 400$ und den Ergebnissen:

$$\bar{x}_1 = 27, \quad s_1^2 = 100 \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 = 28, \quad s_2^2 = 108.$$

Führen Sie einen Hypothesentest in fünf Schritten durch bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$.

ÜA 31.: Die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien von Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs betragen pro Semester $\mu_0 = 27\text{€}$ bei einer Standardabweichung von $\sigma = 10$. Wir prüfen die Behauptung H_0 : „Die Durchschnittsausgaben pro Semester sind kleiner gleich 27€ “ durch Zufallsstichproben vom Umfang $n = 100$ (200, 400) bei einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha) = 0,9545$.

Wie groß ist der β -Fehler bei der Alternativhypothese H_1 : „Die Durchschnittsausgaben pro Semester sind größer gleich 29€ “?

ÜA 32.: Eine Stichprobe von 1 000 Studierenden der Fakultät Technik der DHBWs ergab 350 Studierende mit der Mathenote 3.

Bei einem Prozentsatz von 40% oder mehr Studierenden mit Mathenote 3 sollen Stützkurse, bei einem Prozentsatz von 30% oder weniger Tüftelkurse angeboten werden.

Prüfen Sie die Hypothese H_0 : „Unter den Studierenden der Fakultät Technik gibt es 30% oder weniger mit Mathenote 3“ gegen die Alternativhypothese H_1 : „Unter den Studierenden der Fakultät Technik gibt es 40% oder mehr mit Mathenote 3“.

6.5 Übungsaufgaben zur Zeitreihenanalyse

1. Ein Unternehmer hat in den letzten 6 Jahren folgende Umsätze (in Tsd€) erzielt:

Beobachtungsjahr	t	1	2	3	4	5	6
Umsatz (in Tsd€)	x_t	540	542	541	543	540	541

Bestimmen Sie Umsätze x_t^* mit der exponentiellen Glättung 1. Ordnung für $\alpha = 0,3$ und prognostizieren Sie den Umsatz für das 7. Jahr.

2. Ein Unternehmer hat in den letzten 10 Jahren folgende Umsätze (in Tsd€) erzielt:

Beobachtungsjahr	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz (in Tsd€)	x_t	120	124	130	137	139	146	150	153	162	166

- Bestimmen Sie Umsätze mit der exponentiellen Glättung 2. Ordnung (Modell von Brown) für $\alpha = 0,6$ und prognostizieren Sie den Umsatz für das 11. und 12. Jahr.
- Bestimmen Sie Umsätze mit der linearen exponentiellen Glättung von Holt-Winters für $\alpha = 0,3$ und $\beta = 0,7$ und prognostizieren Sie den Umsatz für das 11. und 12. Jahr.

3. Ein Unternehmer hat in den letzten 12 Monaten folgende Umsätze (in Tsd€) erzielt:

Jahr	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Umsatz (Tsd€)	x_t	170	176	180	172	180	186	192	184	196	206	210	205

- Bestimmen Sie Umsätze mit dem additiven saisonalen Modell von Holt-Winters unter der Annahme stabiler Schwankungen über $k = 4$ Quartale für $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,6$, $\gamma = 0,1$ und prognostizieren Sie den Umsatz für das 4. Jahr.
- Bestimmen Sie Umsätze mit dem multiplikativen saisonalen Modell von Holt-Winters unter der Annahme über die Zeit variierender Schwankungen über $k = 4$ Quartale für $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,9$, $\gamma = 0,1$ und prognostizieren Sie den Umsatz für das 4. Jahr.