Statistik II
Stichprobentheorie und -praxis

Prof. Dr. Irene Rößler

Prof. Dr. Albrecht Ungerer

**Übungsaufgaben zu den Kapiteln
4 und 5 des Buches:**

**Rößler/Ungerer (2019): Statistik
für Wirtschaftswissenschaftler**

Springer Gabler

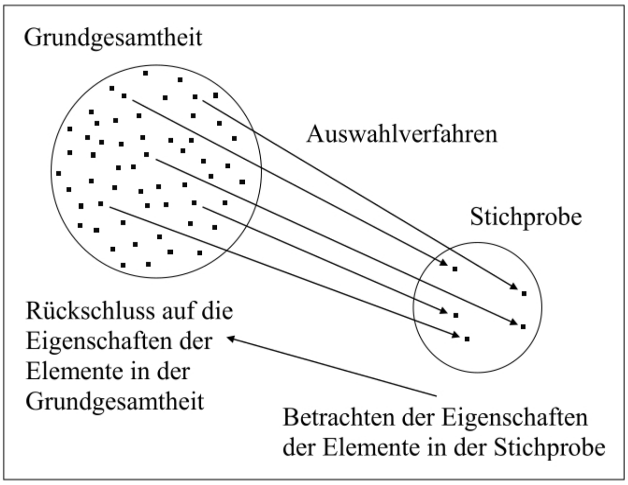
Die mit „FS“ versehenen Hinweise beziehen sich auf:
www.prof-roessler.de/Dateien/Statistik/formelsammlung.pdf

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung[1]

1.1 Problemstellung

Grundsätzlich geht es beim Ziehen von Stichproben darum, Informationen über eine Grundgesamtheit von Personen, Objekten, Ereignissen oder sozialen, rechtlichen bzw. regionalen Einheiten (Buch, Seite 12) zu erhalten. In der Praxis ist es nicht immer möglich bzw. wirtschaftlich sinnvoll, für eine Untersuchung alle Personen, Objekte oder ... der Grundgesamtheit heranzuziehen. Vielmehr geht es oft darum, aufgrund von Untersuchungen an einem Teil (einer Stichprobe) auf die Eigenschaften des Ganzen zu schließen (vgl. Abbildung). Unter welchen Bedingungen dieser Schluss möglich ist, erklärt die Stichprobentheorie.



1.2 Grundgesamtheit und Stichprobe

Die sogenannte Grundgesamtheit ist diejenige Menge von Personen, Objekten, Ereignissen oder sozialen, rechtlichen bzw. regionalen Einheiten, über die man Informationen gewinnen will. Wird jedes einzelne Element dieser Gesamtheit auf die gewünschte Information hin statistisch erfasst, spricht man von einer Totalerhebung. Geht nur ein Teil der Elemente der Grundgesamtheit in die statistische Erhebung ein, so handelt es sich um eine Stichprobe. Gelangen die Elemente so in die Stichprobe, dass im Hinblick auf den Untersuchungsgegenstand mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf alle Elemente der Grundgesamtheit geschlossen werden kann, so ist die Stichprobe repräsentativ für die Grundgesamtheit (Buch, Seite 5-7).

Bsp.: Jeder Kaufmann muss einmal pro Jahr eine Inventur, d.h. eine Bestandsaufnahme aller seiner im Geschäft befindlichen Waren, durchführen. Bei großen Betrieben bzw. Lagern bedeutet dies eine enorme zeitliche und finanzielle Belastung. Aus diesem Grund hat der Gesetzgeber festgelegt, dass anstelle einer Vollinventur auch eine Inventur auf Stichprobenbasis erfolgen darf.

2 Stichprobenfehler[2]

Jede aus einer Stichprobe gewonnene Information über die Grundgesamtheit ist mit einem Fehler behaftet. Dieser Fehler wird aufgrund der Vorteile einer Stichprobenziehung gegenüber einer Totalerhebung in

[1/2] vgl. http://www.stat4u.at/download/1423/stichpr.pdf, Marcus Hudec und Christian Neumann, Universität Wien

Kauf genommen. Im Kapitel 5.2 wird beschrieben, wie für eine Stichprobe mit dem Stichprobenumfang (n) der Stichprobenfehler ($|\hat{e}|$) – unter bestimmten Annahmen über die Verteilung der Zufallsvariablen (ZV) und bei gegebener Aussagewahrscheinlichkeit ($1-\alpha$) – geschätzt werden kann.

2.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler sind Abweichungen vom wahren Wert, die nicht zufällig entstanden sind. Ursache für systematische Fehler können wissentliche oder willentliche Einwirkungen und organisatorische oder technische Gegebenheiten sein. Diese Fehler beruhen auf einem mangelhaften Stichprobenplan, d.h. die Stichprobe wurde so gezogen, dass sie von vornherein als verzerrt (d.h. nicht repräsentativ) einzustufen ist.

Bsp. 1: Ändert eine Führungskraft im Rechnungswesen die Rechnungslegungspolitik, so kann dies solange Fehler verursachen, bis das Personal mit den Veränderungen vertraut ist. Analog können einer neuen Führungskraft gehäuft Beurteilungsfehler unterlaufen, bis sie mit dem ihr unbekannten System vertraut ist.

Bsp. 2: Beim Zählen von Artikeln kann es zu Doppelzählungen oder Auslassungen kommen, wenn keine Inventuraufkleber verwendet werden.

Bsp. 3: Bei einer Messung kann ein systematischer Fehler durch ungenaue Messgeräte zustande kommen. Wenn eine Waage ohne Belastung bereits 10 kg anzeigt, wird jede Wägung systematisch um 10 kg zuviel anzeigen.

2.2 Zufällige Fehler

Zufällige Fehler sind Abweichungen vom wahren Wert, die zufällig entstanden sind. Es kann passieren, dass in einer Stichprobe zufälligerweise gerade eine gegenüber der Grundgesamtheit überproportionale Anzahl von Elementen vorhanden ist, die eine bestimmte untersuchte Eigenschaft aufweist.

Bsp.: An einer DHBW sind im Durchschnitt der letzten 5 Jahre pro Jahr 1 000 Studierende eingeschrieben, wobei 400 (d.h. 40 %) die Mathenote 3 haben. Im darauf folgenden Jahr werden zufällig 50 Studierende ausgewählt. Welche Anteile der Studierenden mit Mathenote 3 sind in der Stichprobe möglich? Beispielhaft werden 3 Möglichkeiten beschrieben:

- 15 Studierende (also 30 %) haben die Mathenote 3.
- 20 Studierende (also 40 %) haben die Mathenote 3 (in diesem Fall würde der Anteil in der Stichprobe genau dem Anteil in der Grundgesamtheit entsprechen).
- 25 Studierende (also 50 %) haben die Mathenote 3.

Wenn die Stichprobe zufällig gezogen wird, sind nicht alle Zusammensetzungen der Stichprobe gleich wahrscheinlich. Mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung können die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Zusammensetzungen berechnet werden (vgl. ÜA 5). Der zweite Fall ist mit 11,5 % wahrscheinlicher als der erste mit 4,15 % und der dritte mit 4,05 %. Außerdem kann für die Stichprobe ein Intervall bestimmt werden, in dem die Zahl der Studierenden mit Mathenote 3 höchstwahrscheinlich liegen wird (vgl. ÜA 9).

3 Arten von Stichproben[3]

Man kann verschiedene Arten von Stichproben danach unterscheiden, wie die Elemente aus der Grundgesamtheit ausgewählt werden (vgl. Buch, Seite 6). Welches Teilauswahlverfahren angewandt werden soll – bei der Stichprobeninventur *muss* es eine Zufallsstichprobe sein – hängt davon ab, wie das vorgegebene Prüfungsziel (z.B. nachträgliche Überprüfung der Einhaltung von Qualitätsstandards) am besten erreicht wird (vgl. Buch, Seite 251).

3.1 Willkürliche Auswahl

Bei einer willkürlichen Auswahl (Auswahl ohne Regeln) liegt die Entscheidung über die Aufnahme eines Elements der Grundgesamtheit in die Stichprobe im Ermessen des Auswählenden. Die willkürliche Auswahl erlaubt keine Berechnung von Auswahlwahrscheinlichkeiten.

3.2 Bewusste Auswahl

Eine bewusste Auswahl erfolgt nach einem Auswahlplan, dessen Regeln üblicherweise angegeben werden können und die überprüfbar sind. Dennoch sind die inferenzstatistischen Techniken nicht anwendbar.

3.2.1 Typische Auswahl

Weist die Gesamtheit bzgl. der Untersuchungsvariablen keine große Streuung auf, so können – insbesondere bei Verlaufsuntersuchungen – typische Einzelfälle (vertieft) studiert werden, z.B. Einzelhandelskunden, deren Weg durch den Supermarkt beobachtet wird (Buch, Seite 7).

3.2.2 Quotenverfahren

Hier werden die Anteilsätze (Quoten) der Identifikationsmerkmale in der Teilerhebung so wie in der Grundgesamtheit gesetzt. Das Quotenverfahren und genügend große Stichproben und genügend große Zufallsstichproben (s.u.) führen zu repräsentativen, d.h. auf die Grundgesamtheit übertragbaren Ergebnissen bzgl. der Variablen. Bei der nachträglichen Plausibilisierung der Repräsentativität einer Teilerhebung wird oft die Quotengleichheit der Identifikationsmerkmale überprüft. Bei Zufallsstichproben (s.u.) kann die „Genauigkeit“ des Verfahrens mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (schon vor der Ziehung) berechnet werden, beim Quotenverfahren durch „Bewährung“ beim wiederholten Einsatz bzw. durch Vergleich mit dem Ergebnis der Totalerhebung z.B. bei Wahlen (Buch, Seite 6).

3.2.3 Cut-off-Verfahren

Das cut-off-Verfahren „schneidet“ bzgl. des Untersuchungsziels „unwichtige“ Einheiten ab. Durch das Abschneiden wird also die Zahl der zu erhebenden Einheiten (Totalerhebung und Stichprobe) reduziert. Da bei großen Umfängen bei einfachen Zufallsstichproben mit systematischen Fehlern gerechnet werden

[3] vgl. http://www.stat4u.at/download/1423/stichpr.pdf, Marcus Hudec und Christian Neumann, Universität Wien

muss, ist ein cut-off-Verfahren – sofern bei der Totalerhebung keine systematischen Fehler auftreten – vorzuziehen.

Bsp.: Bestimmung des Gesamtwertes des Inventars durch Ermittlung der meist wenigen Einheiten, die die größten Beiträge zur Merkmalssumme leisten (vgl. ÜA 33).

3.3 Zufallsauswahl

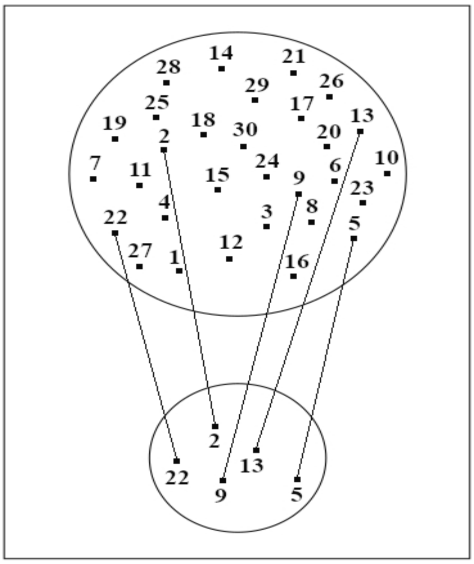
Bei der Zufallsauswahl (Randomverfahren) muss jedes Element, das in die Stichprobe gelangt, eine berechenbare Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, besitzen. Die Zufallsauswahl ist eine in der Praxis häufig angewandte Art der Stichprobenziehung, da man in diesem Fall mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Aussagen über die Genauigkeit bzw. Sicherheit der von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit übertragenen Resultate treffen kann.

Für eine *repräsentative* Stichprobe muss eine Zufallsauswahl vorgenommen werden, so dass von den Ergebnissen bezüglich der Variablen in der Stichprobe auf die Grundgesamtheit geschlossen werden kann (vgl. Kapitel 5.2).

3.3.1 Einfache Zufallsauswahl

Bei der einfachen Zufallsauswahl (simple random sampling) wird aus allen N Elementen der Grundgesamtheit eine Stichprobe von n Elementen gezogen. Dabei haben alle n Elemente dieselbe Wahrscheinlichkeit, in die Stichprobe zu gelangen.

Bsp.: Aus einem Kurs von Studierenden der DHBW von $N = 30$ sollen $n = 5$ in die Stichprobe kommen. Eine einfache Zufallsauswahl könnte folgendermaßen aussehen: Jedem Studierenden wird eine Zahl zugewiesen. Diese Zahl wird auf einem Zettel notiert, der Zettel wird gefaltet und alle Zettel kommen in einen Topf. Nun werden 5 Zettel blind gezogen (sog. Urnenmodell).



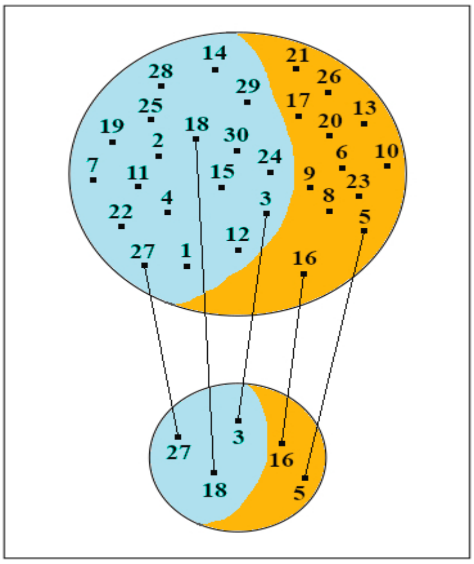
Jeder Studierende hat eine Chance (Wahrscheinlichkeit) von $\frac{n}{N} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ (d.h. 16,67%) in die Stichprobe zu gelangen $\left(\frac{\text{Anzahl der „günstigen" Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \text{relative Häufigkeit}\right)$.

3.3.2 Geschichtete Zufallsauswahl

Bei der geschichteten Zufallsauswahl wird die Grundgesamtheit zunächst in verschiedene Teilmengen (sog. Schichten) zerlegt und danach werden aus jeder Schicht einige Elemente für die Stichprobe zufällig entnommen. Diese Vorgehensweise soll dazu dienen, eine heterogene Grundgesamtheit in homogene Teilmengen zu zerlegen, um zu verhindern, dass in der Stichprobe ohne Schichtung gewisse Teile der Grundgesamtheit zu stark oder zu schwach vertreten sind. Die Schichtung führt dann zu einer Verkleinerung des Stichprobenfehlers. Der Effekt der Schichtung kann im günstigsten Fall der Reduktion der Gesmatvarianz um die externe Varianz (vgl. Varianzzerlegung) entsprechen (ÜA 23 und ÜA 24).

3.3.2.1 Proportional geschichtete Zufallsauswahl

Bsp.: Der Kurs aus dem vorigen Beispiel beinhaltet 18 männliche und 12 weibliche Studierende. Damit das Verhältnis der Grundgesamtheit von männlichen zu weiblichen Studierenden auch in der Stichprobe gewahrt bleibt, wird die Grundgesamtheit in zwei Schichten (männliche und weibliche) geteilt und innerhalb der Schichten dann eine einfache Zufallsauswahl von 3 männlichen und 2 weiblichen Studierenden vorgenommen.



3.3.2.2 Disproportional geschichtete Zufallsauswahl

Bei einer optimalen Schichtung, z.B. für eine Stichprobeninventur, werden aus Schichten mit höherer Streuung und höherem Umfang größere Stichproben gezogen (vgl. Buch, Seite 158).

3.3.3 Mehrstufige Zufallsauswahl

Bei der mehrstufigen Zufallsauswahl werden in mehreren Stufen Zufallsauswahlen getroffen. Die Grundgesamtheit wird zunächst in Gruppen von Elementen eingeteilt, die als Primäreinheiten bezeichnet werden, wobei die Primäreinheiten die Auswahlgrundlage der ersten Stufe darstellen. Aus den Primäreinheiten wird dann eine Zufallsstichprobe der Sekundäreinheiten gezogen (und so weiter). Z.B. Auswahl in der ersten Stufe „DHBW-Standorte“, in der zweiten Stufe „Fakultäten“ in der dritten Stufe „Studiengänge“, in der vierten Stufe „Kurse“, in der fünften Stufe „Studierende“ als statistische Einheiten der gewünschten Gesamtheit.

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.1 Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariablen und Verteilungen

Wird aus einer Grundgesamtheit ein Element (eine Person oder Objekt) gemäß einer einfachen Zufallsauswahl ausgewählt und stellt man seine Ausprägung bzgl. eines metrischen Merkmals X fest, so erhält man eine Zufallsvariable, die ebenso mit X bezeichnet wird (Buch, Seite 100/101). Die Verteilungsfunktion $F(x_j) = P(X \le x_j)$ einer diskreten Zufallsvariablen bzw. $F(x) = P(X \le x)$ einer stetigen Zufallsvariablen misst die Wahrscheinlichkeit, mit der bei einer einfachen Zufallsauswahl ein Element aus der Grundgesamtheit gewählt wird, dessen Ausprägung höchstens gleich x_j bzw. x ist. Die durch die Verteilungsfunktion $F(x_j)$ bzw. $F(x)$ festgelegte (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung der Zufallsvariablen X wird als Verteilung der Grundgesamtheit bzgl. des Merkmals X (kurz: Verteilung der Grundgesamtheit) bezeichnet. Der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X können auch als Erwartungswert und Varianz der Grundgesamtheit (bzgl. des Merkmals X) bezeichnet werden (Buch, Seite 102/103). Ist die Grundgesamtheit endlich, so stimmt die Verteilung mit der relativen Häufigkeitsverteilung des Merkmals X in der Grundgesamtheit überein [vgl. Buch, Seite 102, Seite 105/106 sowie Aufgabe 12, Buch, Seite 115].

- **Zufallsvariable**

  X (Großbuchstaben)

- **Realisationen**

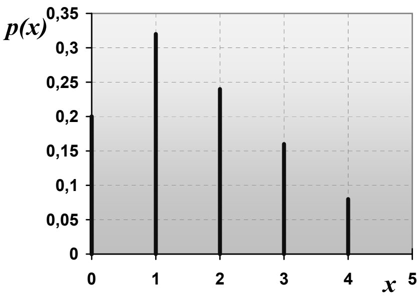
  x (Kleinbuchstaben).

- **Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen** X

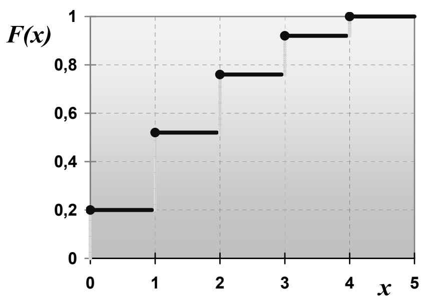
$$P(X = x_j) = p(x_j) \ \text{ mit } \ \sum_j p(x_j) = 1$$

$$P(X \le x_j) = F(x_j) = \sum_{k=1}^{j} p(x_k) \ \text{ mit } \ x_k < x_{k+1}.$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X



Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen X



- **Binomialverteilung** (Buch, Seite 104)

$$p(x) = B(x|n,\pi) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$$

  - **Erwartungswert**

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= \sum_x x\binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x} \\ &= n\cdot\pi \end{aligned}$$

  - **Varianz**

$$\begin{aligned} Var(X) = \sigma^2 &= \sum_x x^2\binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x} - (n\pi)^2 \\ &= n\cdot\pi(1-\pi). \end{aligned}$$

Die Binomialverteilung kann als Wahrscheinlichkeitsverteilung immer dann eingesetzt werden, wenn die Stichproben m.Z. (oder allgemein Stichproben aus sehr großen Grundgesamtheiten[4]) aus dichotomen Grundgesamtheiten [(0,1)-Variable] gezogen und „Fälle“ in der Stichprobe festgestellt werden (Buch, Seite 104).

D.h.: Zufallsvariable X: Zahl der Personen oder Objekte mit der Ausprägung x_j in einer Stichprobe m.Z. vom Umfang n (oder anders ausgedrückt: n-maliges Ziehen einer Stichprobe m.Z.) und den „Fällen“, d.h. Realisationen, $x = 0,1,2,\ldots,n$, mit 0: „keine Person oder Objekt mit der Eigenschaft x_j“, 1: „eine Person oder Objekt mit der Eigenschaft x_j“, 2: „zwei Personen oder Objekte mit der Eigenschaft x_j“, ..., n: „n Personen oder Objekte mit der Eigenschaft x_j“.

Bernoulli-Experiment: Zufällige Ziehung einer Stichprobe m.Z. im Umfang n aus einer (0,1)-Grundgesamtheit mit 0: „nicht Eigenschaft x_j“ und Anteil $(1-\pi)$ sowie 1: „Eigenschaft x_j“ und Anteil π der Grundgesamtheit.

ÜA 1: Gegeben sei der Beispieldatensatz FS, Seite 3 mit der Verteilung der Mathenoten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit *zwei* Studierenden sowie den zugehörigen Erwartungswert und die Varianz.

gegeben: 1) $\pi = 0,4$: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 in der Grundgesamtheit ($N = 25$), da 10 von 25 Studierenden die Mathenote 3 haben

2) ZV X: Anzahl der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 2$

$X \sim B(X\,|\,n,\pi) = B(X\,|\,2;0,4)$

[4] Bei einer entsprechend großen Grundgesamtheit spielt es keine große Rolle, ob das Ziehen mit oder ohne Zurücklegen stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Element mehrmals gezogen wird, ist so gering, dass man sie vernachlässigen kann.

gesucht: 1) Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h.:
$p(0),\ p(1),\ p(2)$ und $P(X \leq 0),\ P(X \leq 1),\ P(X \leq 2)$
2) $E(X)$
3) $Var(X)$

1a) Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, d.h. der Binomialverteilung, wobei X: Zahl der Studierenden mit der Mathenote 3 in der Stichprobe (m.Z.) von 2 Studierenden mit $x = 0,1,2$, wobei 0: „kein Studierender mit Mathenote 3“, 1: „ein Studierender mit Mathenote 3“, 2: „zwei Studierende mit Mathenote 3“.

Bernoulli-Experiment: Ziehung einer Stichprobe im Umfang $n = 2$ aus einer (0,1)-Grundgesamtheit mit 0: „nicht Mathenote 3“ und dem Anteil $(1-\pi) = 0,6$ sowie 1: „Mathenote 3“ und dem Anteil $\pi = \frac{10}{25} = 0,4$ (aus Beispieldatensatz).

$$\Longrightarrow \quad P(X=0) = \boxed{\text{p(0)}} = \binom{2}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^2 = \boxed{0{,}36} \quad | \quad p(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

$$P(X=1) = \boxed{\text{p(1)}} = \binom{2}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^1 = \boxed{0{,}48} \quad | \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(X=2) = \boxed{\text{p(2)}} = \binom{2}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^0 = \boxed{0{,}16}.$$

Hinweis: Die Werte der Binomialverteilung können mit excel einfach bestimmt werden – vgl. http://www.prof-roessler.de/Dateien/Statistik/zgs.xlsm (Beispiel für den zentralen Grenzwertsatz) $\longrightarrow$ Binomialverteilung mit den Werten $\pi = 0,4$ und $n = 2$.

D.h.: Die Wahrscheinlichkeit, keinen Studierenden mit der Mathenote 3 bei zweimaligem Ziehen (m.Z.) zu erhalten, beträgt $0,36$, die Wahrscheinlichkeit, einen Studierenden mit der Mathenote 3 bei zweimaligem Ziehen (m.Z.) zu erhalten, ist $0,48$ und die Wahrscheinlichkeit, zwei mit der Mathenote 3 bei zweimaligem Ziehen (m.Z.) zu erhalten, beträgt $0,16$.

Bestimmung der Verteilungsfunktion von X:

$F(0) = P(X \leq 0) = 0,36$
$F(1) = P(X \leq 1) = 0,36 + 0,48 = 0,84$
$F(2) = P(X \leq 2) = 0,36 + 0,48 + 0,16 = 1.$

D.h.: Die Wahrscheinlichkeit, zufällig *einen oder keinen* Studierenden mit Mathenote 3 in der Stichprobe bei zweimaligem Ziehen (m.Z.) zu erhalten, beträgt 0,84.

1b) Alternative Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Ereignis „Zahl der Studierenden mit Mathenote 3“ in einer Stichprobe (m.Z.) von 2 Studierenden aus den 25:

Die Wahrscheinlichkeit, in *einer* Stichprobe aus den 25 Studierenden zufällig einen Studierenden mit Mathenote 2 zu ziehen, beträgt $p(2) = \frac{10}{25} = 0,4$, die Wahrscheinlichkeit, einen Studierenden mit Mathenote 3 zu ziehen, beträgt $p(3) = \frac{10}{25} = 0,4$ und die Wahrscheinlichkeit, einen Studierenden mit Mathenote 4 zu ziehen, beträgt $p(4) = \frac{5}{25} = 0,2$. (Aufgrund des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Studierenden mit der Mathenote „…“ zu ziehen, das Verhältnis der „günstigen“ Fälle zu den möglichen Fällen, d.h. die relative Häufigkeit.)

Ergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten (nach Anwendung des Additions- und Multiplikationssatzes) für den Zufallsprozess „Ziehung von *zwei* Stichproben“ (m.Z., d.h. stochastisch unabh., also Anwendung des Multiplikationssatzes) aus der Grundgesamtheit von 25 Studierenden und Feststellung der Mathenote:

Ergebnis	Wahrscheinlichkeit	
(2,2)	$0,4 \cdot 0,4$	$= 0,16$
(2,3),(3,2)	$2 \cdot 0,4 \cdot 0,4$	$= 0,32$
(2,4),(4,2)	$2 \cdot 0,4 \cdot 0,2$	$= 0,16$
(3,3)	$0,4 \cdot 0,4$	$= 0,16$
(3,4),(4,3)	$2 \cdot 0,4 \cdot 0,2$	$= 0,16$
(4,4)	$0,2 \cdot 0,2$	$= 0,04$
Σ		1

D.h.: Die Wahrscheinlichkeit, zufällig keinen Studierenden mit Mathenote 3 in der Stichprobe bei zweimaligem Ziehen m.Z. zu erhalten – dies ist dann der Fall, wenn das Ergebnis (2,2) oder (2,4) oder (4,2) oder (4,4) eintrifft –, beträgt $0,16 + 0,16 + 0,04 = 0,36$.

Die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Studierenden mit Mathenote 3 in der Stichprobe bei zweimaligem Ziehen m.Z. zu erhalten, beträgt $0,32 + 0,16 = 0,48$.

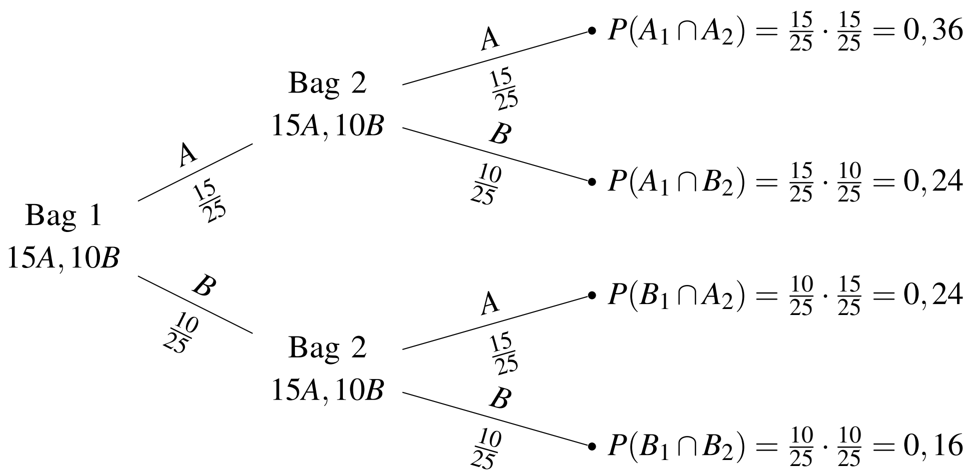
Die Wahrscheinlichkeit, zufällig zwei Studierende mit Mathenote 3 in der Stichprobe bei zweimaligem Ziehen m.Z. zu erhalten, beträgt $0,16$.

Mit der Zufallsvariablen X: Zahl der Studierenden mit Mathenote 3 in der Stichprobe und den Realisationen bei 2 Ziehungen ($n = 2$): $x = 0,1,2$ (d.h.: 0: „kein Studierender mit Mathenote 3“, 1: „ein Studierender mit Mathenote 3“, 2: „zwei Studierende mit Mathenote 3“) ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung (Binomialverteilung):

x	$p(x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	0,36	0,36
1	0,48	0,84
2	0,16	1
Σ	1	–

1c) Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Ereignis „Zahl der Studierenden mit Mathenote 3“ in einer Stichprobe (m.Z.) von 2 Studierenden aus den 25 anhand eines Wahrscheinlichkeitsbaums:

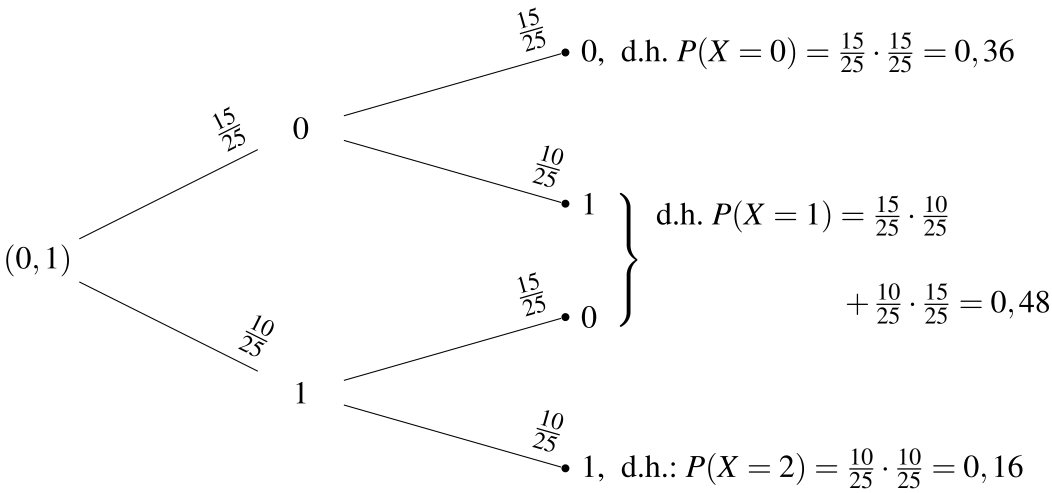
1ca) A: Studierende mit nicht-Mathenote 3; B: Studierende mit Mathenote 3



Für X: Anzahl der Studierenden mit Mathenote 3 in der Stichprobe heißt das:

$$P(X=0) = P(A_1 \cap A_2) = 0,36$$
$$P(X=1) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) = 0,48$$
$$P(X=2) = P(B_1 \cap B_2) = 0,16.$$

1cb) Alternative Darstellung für X: Anzahl der Studierenden mit Mathenote 3 bei Ziehung einer Stichprobe im Umfang $n = 2$ (m.Z.) aus einer (0,1)-Grundgesamtheit mit 0: „nicht Mathenote 3" und Anteil $(1-\pi) = \frac{15}{25}$ sowie 1: „Mathenote 3" und Anteil $\pi = \frac{10}{25}$ (Anteil heißt relative Häufigkeit und das entspricht – gemäß dem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff – der Wahrscheinlichkeit bei einmaligem Ziehen):



2) Erwartungswert (vgl. Buch, Seite 104): $E(X) = n \cdot \pi = 2 \cdot 0,4 = 0,8$, d.h.: Bei einem Zufallsexperiment, in dem aus der (0,1)-Grundgesamtheit – mit 0: „nicht Mathenote 3" und dem Anteil $(1-\pi) = 0,6$ sowie 1: „Mathenote 3" und dem Anteil $\pi = 0,4$ – eine Stichprobe im Umfang 2 gezogen wird, wird erwartet, dass dabei 0,8 Studierende mit Mathenote 3 enthalten sind. (Zum Vergleich: Wenn alle 25 Studierenden die Mathenote 3 hätten, wäre die Erwartung, dass 2 Studierende mit Mathenote 3 in der Stichprobe vom Umfang 2 enthalten sind, 2 (d.h. $E(X) = n \cdot \pi = 2 \cdot 1 = 2$).

Würde man $n = N = 25$ wählen, so wäre $E(X) = n \cdot \pi = 25 \cdot \frac{10}{25} = 10$, d.h. man erwartet 10 Studierende mit der Mathenote 3 beim 25 maligen Ziehen zu erhalten (also gerade soviel, wie in der Grundgesamtheit von 25 Studierenden vorliegen). Im Beispiel ist $n = 2$, d.h. man erwartet 0,8 Studierende mit Mathenote 3, wenn man 2 Studierende aus den 25 Studierenden zieht (m.Z.).

3) Varianz (vgl. Buch, Seite 104): $Var(X) = n \cdot \pi \cdot (1-\pi) = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,48$,
d.h.: Die erwartete Abweichung vom Erwartungswert (Mittelwert) 0,8 der Grundgesamtheit beträgt $\sqrt{0,48} = 0,693$. (Zum Vergleich: Die Varianz ist am kleinsten, nämlich 0, bei einer Einpunktverteilung, d.h. wenn alle 25 Studierenden die Mathenote 3 haben oder aber alle Studierenden nicht die Mathenote 3 haben. Die Varianz ist am größten bei einer Gleichverteilung, d.h. wenn $\pi = (1-\pi) = 0,5$, was hier bei 25 Studierenden nicht möglich ist, also in unserem Beispiel., wenn z.B. 12 Studierende „nicht Mathenote 3" und Anteil $(1-\pi) = \frac{12}{25}$ und 13 Studierende „Mathenote 3" und Anteil $\pi = \frac{13}{25}$ haben, so dass $E(X) = n \cdot \pi = 2 \cdot \frac{13}{25} = 1,04$ und $Var(X) = n \cdot \pi \cdot (1-\pi) = 2 \cdot \frac{13}{25} \cdot \frac{12}{25} = 0,4992$, d.h. erwartete Abweichung vom Erwartungswert 1,04 der Grundgesamtheit wäre $\sqrt{0,4992} = 0,71$.) Also große Streuung!!

4) Vergleichbare Übungsaufgabe 12a, FS, Seite 17, Buch, Seite 115.

ÜA 2: zum Bayes'schen Theorem (vergleichbares Beispiel Buch, Seite 99)

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% hat ein Studierender der Fakultät Technik einer DHBW die Mathenote 1. Es wird ein Test auf diese Studierenden mit Mathenote 1 angeboten. Der Statistikprofessor behauptet, dass dieser Test zu 98% ein verlässliches Ergebnis bei Studierenden mit Mathenote 1 liefert. Aber auch bei 3% der Studierenden, die nicht die Mathenote 1 haben, wird die Mathenote 1 angezeigt.

Ein Studierender wird mit dem Ergebnis Mathenote 1 getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat dieser Studierende tatsächlich eine 1?

Notation: Ereignis A: Mathenote 1; Ereignis B: nicht Mathenote 1;
TP: Test (auf Mathenote 1) positiv; TN: Test (auf Mathenote 1) negativ

gegeben: $P(A) = 0,05$; $P(TP|A) = 0,98$ $[\Longrightarrow P(TN|A) = 0,02]$

$\Downarrow$

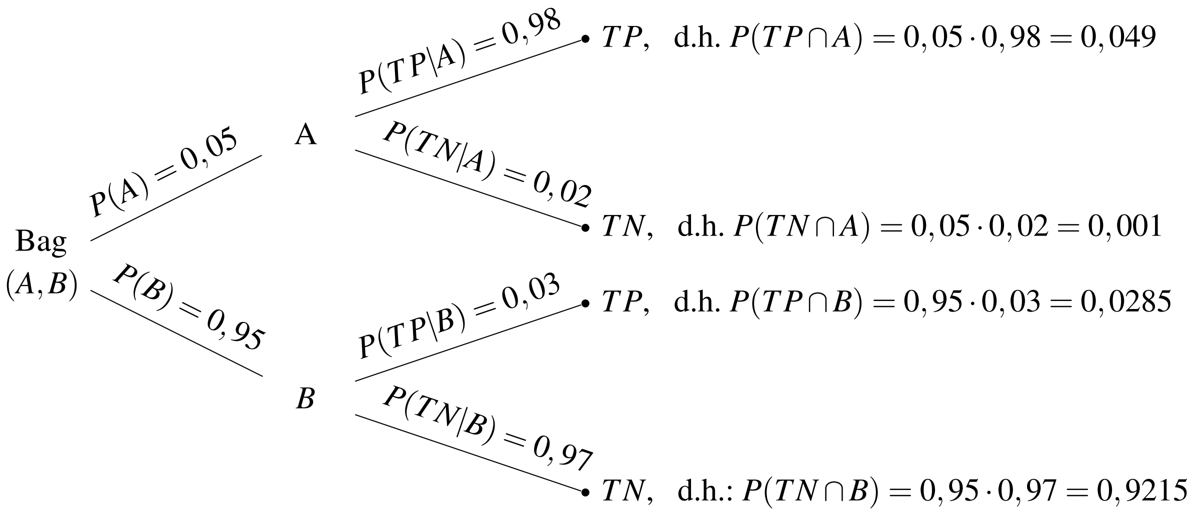
$P(B) = 0,95$; $P(TP|B) = 0,03$ $[\Longrightarrow P(TN|B) = 0,97]$

gesucht: $P(A|TP)$

Bayes'sches Theorem: $$P(A|TP) = \frac{P(TP \cap A)}{P(TP)} = \frac{P(A) \cdot P(TP|A)}{P(A) \cdot P(TP|A) + P(B) \cdot P(TP|B)}$$
$$= \frac{0,05 \cdot 0,98}{0,05 \cdot 0,98 + 0,95 \cdot 0,03} = \frac{0,049}{0,0775} = 0,6323,$$

d.h.: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,23% hat der Studierende tatsächlich die Mathenote 1.

Zur Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeiten kann auch ein Wahrscheinlichkeitsbaum gezeichnet werden:



Alternativer Lösungsweg:

Ergebnis	Wahrscheinlichkeit		
(A,TP)	$0,05 \cdot 0,98$	$= 0,049$	$= P(A \cap TP)$
(A,TN)	$0,05 \cdot 0,02$	$= 0,001$	$= P(A \cap TN)$
(B,TP)	$0,95 \cdot 0,03$	$= 0,0285$	$= P(B \cap TP)$
(B,TN)	$0,95 \cdot 0,97$	$= 0,9215$	$= P(B \cap TN)$
Σ	1		

$$\begin{aligned} P(A|TP) &= \frac{P(TP \cap A)}{P(TP)} \\ &= \frac{0,049}{0,049 + 0,0285} \\ &= \frac{0,049}{0,0775} \\ &= 0,6323. \end{aligned}$$

- **Eine Zufallsvariable** X **und deren Verteilung heißen stetig**, wenn die zugehörige Verteilungsfunktion

  $$F(x) = P(X \leq x)$$

  in Integralform dargestellt werden kann

  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

  Vgl. Buch, Seite 105/106. Der Integrand $f(x)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte oder Dichtefunktion der stetigen Zufallsvariablen X.

  $$F'(x) = f(x) \;\text{ und }\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

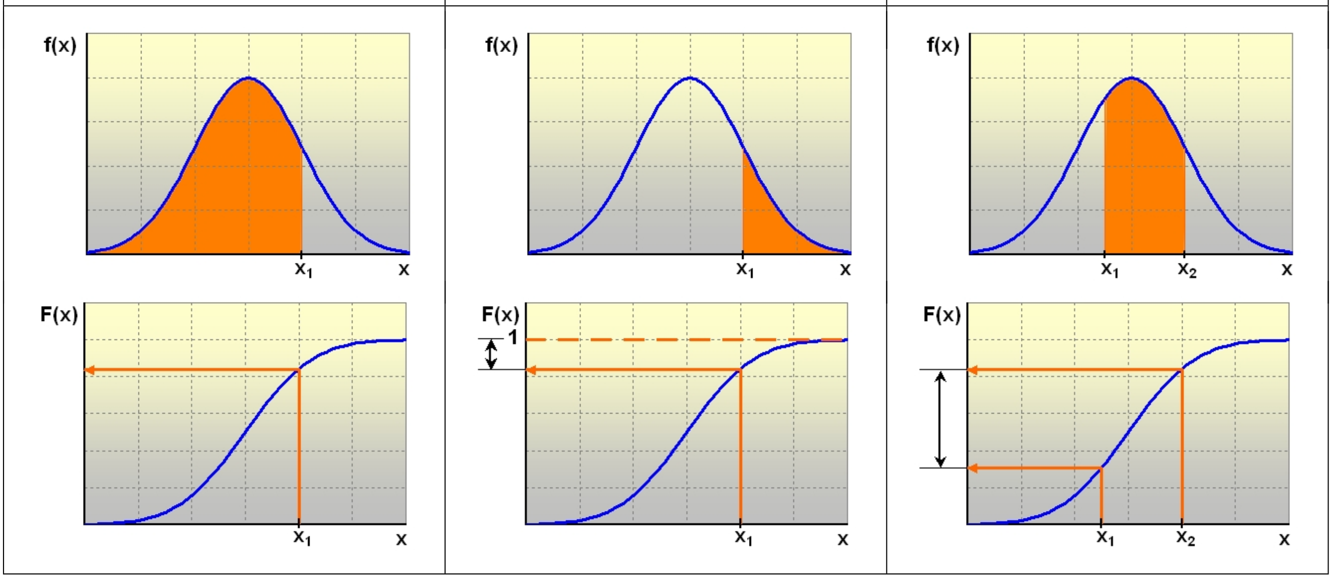
Wahrscheinlichkeiten für Intervalle der stetigen Variablen müssen entweder als bestimmte Integrale der Dichtefunktion oder einfacher als Differenz zweier Funktionswerte der Verteilungsfunktion bestimmt werden.

Vgl. FS, Seite 17: Erläuterungen zu den Grafiken:

Mittlere Grafik: Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion beträgt 1, da die Wahrscheinlichkeit, dass die ZV X einen Wert zwischen $-\infty$ und ∞ annimmt, 1 ist. Daher folgt: Die orange Fläche der mittleren Grafik ergibt sich aus der Differenz der Gesamtfläche der linken Grafik minus der orangen Fläche der linken Grafik. Außerdem folgt auch $P(X > x_1) = 1 - F(x_1) = 1 - P(X \leq x_1)$, denn vgl. linke Grafik: $F(x_1) = P(X \leq x_1)$.

Rechte Grafik: $F(x_2)$ ist die Fläche bis x_2 und von dieser Fläche wird die graue Fläche bis x_1, also $F(x_1)$ abgezogen [also zur Erklärung für $F(x_2)$ und $F(x_1)$ jeweils die linke Grafik verwendet].

$P(X \leq x_1) = F(x_1)$	$P(X > x_1) = 1 - F(x_1)$	$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$



ÜA 3: Gegeben sei der Beispieldatensatz FS, Seite 3, mit der Verteilung der Ausgaben für Kopien (Buch, Seite 25 u. 27):

Ausgaben von … bis unter … €	h_j	f_j	F_j
0 – 15	5	0,2	0,2
15 – 25	8	0,32	0,52
25 – 35	5	0,2	0,72
35 – 50	5	0,2	0,92
50 – 75	2	0,08	1
$\sum$	25=n	1	–

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Studierenden zu ziehen, dessen Ausgaben für Kopien weniger als 35 €, 15 € oder mehr, zwischen 15 und unter 50 € betragen.

gegeben: 1) Verteilung der Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit ($N = 25$) gemäß Tabelle (s.o.)

2) ZV X: Ausgaben für Kopien einer Zufallsstichprobe mit Umfang $n = 1$, (d.h. ziehe aus der Verteilung der Ausgaben für Kopien *einen* Studierenden aus der Grundgesamtheit der 25 Studierenden).[5]

gesucht: $P(X < 35)$, $P(X \geq 15)$, $P(15 \leq X < 50)$

1) $P(X < 35) = F(35) = 0,72$, also 72% vgl. FS, Seite 17, linke Grafik
$P(X \geq 15) = 1 - F(15) = 1 - 0,2 = 0,8$, also 80% vgl. FS, Seite 17, mittlere Grafik
$P(15 \leq X < 50) = F(50) - F(15) = 0,92 - 0,2 = 0,72$, also 72% vgl. FS, Seite 17, rechte Grafik.

Da in der deskriptiven Statistik die Intervalle „bis unter" gebildet werden, wurde die Aufgabenstellung „weniger als 35 €" und „15 € oder mehr" formuliert. Eigentlich müsste die Aufgabenstellung so lauten: „35 € oder weniger" und „mehr als 15 €", d.h. das Konzept $P(X \leq x_1) = F(x_1)$ stimmt nur dann mit der Verteilungsfunktion überein, wenn die Klassen mit „über … bis …" gebildet werden (vgl. Buch, Seite 26 unten). Würde man die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Studierenden zu ziehen, dessen Ausgaben für Kopien weniger als 30 € betragen, bestimmen wollen, so müsste der zugehörige Wert $F(30)$ aus der Grafik der klassierten Verteilungsfunktion (Buch, Seite 27) abgelesen bzw. durch lineare Interpolation geschätzt werden: $P(X \leq 30) = F(30) = 0,62$.

[2) $\mu = 27,4$ (vgl. Buch, Seite 37) und $\sigma^2 = 258,24$ (vgl. Buch, Seite 52) $\Longrightarrow$
Erwartungswert: $E(\overline{X}) = 27,4$, d.h. Wird aus den 25 Studierenden mit den zugehörigen Ausgaben für Kopien gemäß der gegebenen Verteilung, d.h. mit $\mu = 27,4$ und $\sigma^2 = 258,24$, zufällig ein Studierender gezogen, so wird erwartet, dass dieser 27,4 € pro Semester ausgibt.
Varianz: $Var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{258,24}{1} = 258,24$, d.h.: Die erwartete Abweichung vom Mittelwert μ der Grundgesamtheit beträgt $\sqrt{258,24} = 16,07$.]

3) Vergleichbare Übungsaufgabe 12b, FS, Seite 17, Buch, Seite 116.

4.2 Stichprobenfunktionen und die Normalverteilung als Stichprobenverteilung

Werden aus einer Grundgesamtheit n Stichproben gezogen, so kann dem n-Tupel $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ der Zufallsvariablen X_1 der ersten Ziehung mit der Realisation x_1, X_2 der zweiten Ziehung mit der Realisation x_2, …, X_n der n-ten Ziehung mit der Realisation x_n eine sog. Stichprobenfunktion zugewiesen werden, z.B. $T = P = f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ oder $T = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Damit werden alle

[5] Bei einem Stichprobenumfang von z.B. $n = 2$ kann die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittlichen Ausgaben der beiden zufällig gezogenen Studierenden weniger als 35 €, 15 € oder mehr, zwischen 15 und unter 50 € beträgt, nur bestimmt werden, wenn X normalverteilt wäre [oder aber man wählt einen größeren Stichprobenumfang – statt $n = 2$, z.B. $n = 50$ (vgl. Buch, Seite 133)].

denkbaren Ziehungsergebnisse berücksichtigt (frequentistische Auffassung). **Die Stichprobenverteilung der Stichprobenfunktion T sollte bekannt sein, so dass *vor* der Ziehung Wahrscheinlichkeitsaussagen getroffen werden können** (vgl. Buch, Seite 133). (Weitere Eigenschaften von T: Erwartungstreue, Konsistenz, Effizienz – vgl. Buch, Seite 117/118:)

Sehr häufig kann die

- **(Gauß'sche) Normalverteilung**, FS, Seite 18

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{(Dichtefunktion)}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du \quad \text{(Verteilungsfunktion)}$$

als Stichprobenverteilung gewählt werden.

Bsp.

- **arithmetisches Mittel** (Buch, Seite 119)

$$T = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

  - **Erwartungswert**

$$E(\overline{X}) = \mu, \qquad \text{mit } \mu: \text{ arithmetisches Mittel der Grundgesamtheit}$$

  - **Varianz**

$$Var(\overline{X}) = \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad \text{mit } \sigma^2: \text{ Varianz der Grundgesamtheit.}$$

Je höher der Stichprobenumfang – nicht der Auswahlsatz $\frac{n}{N}$, sofern N groß (Praxis: $\frac{n}{N} < 0,05$) – desto weniger streuen die möglichen Stichprobenergebnisse $\bar{x}$.

Die Gauß'sche Normalverteilung hat folgende **Vorteile**:

1) Durch die Standardisierung und Vertafelung der standardisierten Normalverteilung können die Wahrscheinlichkeiten einer normalverteilten Zufallsvariablen einfach bestimmt werden, vgl. FS, Seite 18:

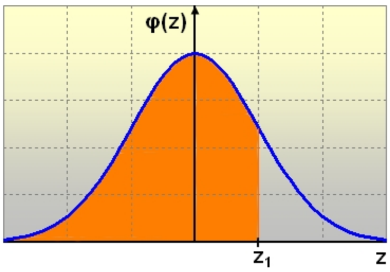
Die Parameter der Normalverteilung sind die (auch deshalb schon in der deskriptiven Statistik häufig verwendeten) Größen μ und σ^2. Für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt:

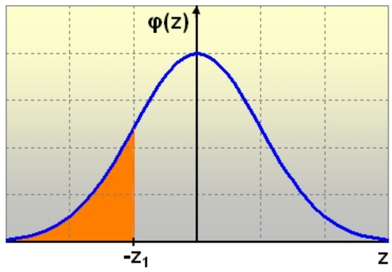
$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du.$$

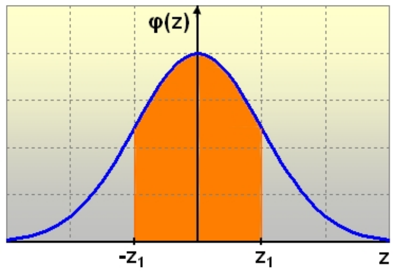
- **Standardisierung** $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \implies P(-z \le Z \le z) = P(\mu - z\cdot\sigma \le X \le \mu + z\cdot\sigma)$

  (denn: Einfach für Z den Ausdruck $\frac{X-\mu}{\sigma}$ einsetzen und die zwei Ungleichungen nach X auflösen)

$P(Z \le z_1) = \Phi(z_1)$	$P(Z \le -z_1) = \Phi(-z_1) = 1 - \Phi(z_1)$	$P(-z_1 \le Z \le z_1) = 2\Phi(z_1) - 1$







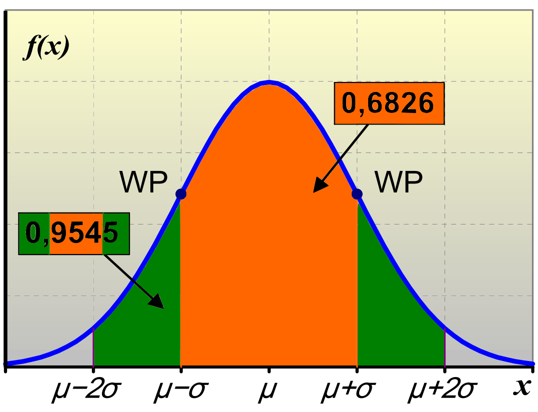
z	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00
Φ(z)	0,500	0,5987	0,6915	0,7734	0,8413	0,8944	0,9332	0,9599	0,9772	0,9938	0,9987

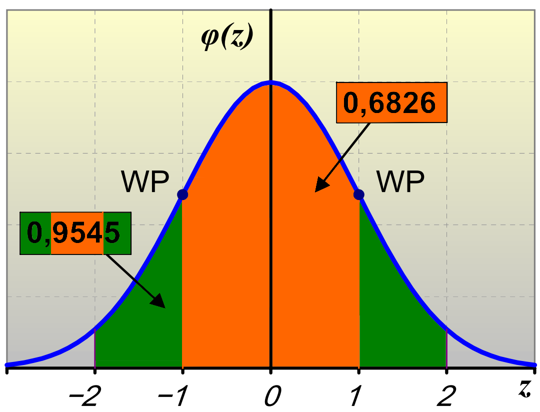
Erläuterung zur mittleren Grafik: Einfach linke Grafik angucken: Wegen Symmetrie der Dichtefunktion ist die graue Fläche der linken Grafik gleich der orangen Fläche der mittleren Grafik und die graue Fläche der linken Grafik lässt sich berechnen als $1 - \Phi(z_1)$.

Erläuterung zur rechten Grafik: Einfach Fläche linke Grafik minus Fläche mittlere Grafik, d.h.: $\Phi(z_1) - [1 - \Phi(z_1)] = 2\Phi(z_1) - 1$.

Für $z = 2$ ist $P(-2 \le Z \le 2) = 2\cdot\Phi(2) - 1 = 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9545$, d.h.: Die Wahrscheinlichkeit, dass die ZV Z Werte zwischen -2 und +2 annimmt, d.h. die ZV X Werte zwischen $\mu - 2\cdot\sigma$ und $\mu + 2\cdot\sigma$ annimmt (sog. 2σ-Bereich) beträgt 95,45%.

Ist die ZV X normalverteilt mit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, so gilt für die Dichtefunktion $f(x)$: $\max(f(x)) = f(\mu)$ und $\mathrm{WP}(f(x)) = f(\mu \pm \sigma)$. Entsprechend gilt für die Dichtefunktion $\varphi(z)$ mit $\bar{z} = 0$ und $s_Z = 1$ (vgl. Buch, Seite 49): $\max(\varphi(z)) = \varphi(0)$ und $\mathrm{WP}(\varphi(z)) = \varphi(\pm 1)$. Die Dichtefunktion $f(x)$ ist symmetrisch um μ und die Dichtefunktion $\varphi(z)$ symmetrisch um $z = 0$. Die Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ bzw. der Kurve $\varphi(z)$ im Intervall $[-1, 1]$ beträgt 0,6826 (denn: $P(-1 \le Z \le 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2\cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$) und im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ bzw. $[-2, 2]$ (s.o.) 0,9545 $\implies$





$z = 0 = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies x = \mu$	$z = -1 = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies x = \mu - \sigma$
$z = 1 = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies x = \mu + \sigma$	$z = -2 = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies x = \mu - 2\sigma$
$z = 2 = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies x = \mu + 2\sigma$	

ÜA 4: Die Grundgesamtheit von X „Ausgaben für Kopien pro Semester“ sei normalverteilt mit $E(X) = \mu = 27$ und $Var(X) = \sigma^2 = 100$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, zufällig *einen* Studierenden zu ziehen, dessen Ausgaben für Kopien 37 € oder weniger, mehr als 12 €, zwischen 7 und 47 € betragen.

gegeben: 1) $\mu = 27$, $\sigma^2 = 100$: arithmetisches Mittel und Varianz der Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit

2) ZV X: Ausgaben für Kopien einer Zufallsstichprobe mit Umfang $n = 1$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

gesucht: $P(X \leq 37)$, $P(X > 12)$, $P(7 < X \leq 47)$

a) $x = 37 \implies z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{37-27}{10} = 1$ $\implies$ FS, Seite 18 linke Grafik

$P(X \leq 37) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,8413$, also 84,13%

b) $x = 12 \implies z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{12-27}{10} = -1,5$ $\implies$ FS, Seite 18 mittlere Grafik

$$\begin{aligned} P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) &= 1 - P(Z \leq -1,5) = 1 - \Phi(-1,5) \\ &= 1 - [1 - \Phi(1,5)] = \Phi(1,5) = 0,9332, \text{ also } 93,32\% \end{aligned}$$

c) $x = 7 \implies z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{7-27}{10} = -2$

$x = 47 \implies z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{47-27}{10} = 2 \implies$

$$\begin{aligned} P(7 < X \leq 47) &= P(-2 < Z \leq 2) \quad \implies \text{FS, Seite 18 rechte Grafik} \\ &= 2 \cdot \Phi(2) - 1 \\ &= 2 \cdot 0,97725 - 1 = 0,9545, \text{ also } 95,45\%. \end{aligned}$$

Vergleichbare Übungsaufgabe 13a, FS, Seite 18, Buch, Seite 134.

Weitere **Vorteile** der Normalverteilung:

2) Tests und Schätzungen sind besonders einfach (vgl. Kapitel 5).

3) Viele Verteilungen konvergieren bei großen Stichprobenumfängen gegen die Normalverteilung.

Exemplarisch betrachten wir im Kapitel 5 zwei Stichprobenfunktionen: Die Stichprobenfunktion des Anteilswertes (homograder Fall) und die Stichprobenfunktion des arithmetischen Mittels (heterograder Fall).

- **Homograder Fall** ($x_i = 0$ oder $x_i = 1$): vgl. Buch, Seite 121 (Stichprobenverteilung)

$$X = n \cdot P \;\text{ mit }\; E(X) = n \cdot \pi \;\text{ und }\; Var(X) = \sigma_X^2 = n \cdot \pi(1-\pi) \quad \text{bzw.}$$

$$\overline{X} = P \;\text{ mit }\; E(P) = \pi \;\text{ und }\; Var(P) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}.$$

- **Heterograder Fall** (x_i beliebiger Zahlenwert): vgl. Buch, Seite 121 (Stichprobenverteilung)

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} X_i \;\text{ mit }\; E(\overline{X}) = \mu \;\text{ und }\; Var(\overline{X}) = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Zur Erläuterung des Lösens eines Schätzproblems (Lösung vgl. Kapitel 5.2) betrachten wir zunächst den homograden Fall:

Bsp.: Aus einer Stichprobe von $N = 1\,000$ Studierenden wird eine Stichprobe (m.Z.) von $n = 50$ Studierenden gezogen. Dabei haben 20 Studierende die Mathenote 3 (d.h. der Anteil dieser Studierenden beträgt $p = 0,4$). Dann stellt sich die Frage: „Wie gut kann man von dem Anteil p der Stichprobe auf den wahren Anteil π der Grundgesamtheit schließen?" D.h.: Wie gut kann man π durch p schätzen? Wir zeigen: Wenn man den gegebenen Anteil p der Stichprobe für die Schätzung des wahren Anteils π verwendet, so kann man ein Intervall angeben, in dem der wahre Anteil π mit großer Wahrscheinlichkeit liegen wird. Zur Beantwortung der Frage und der Erläuterung des Intervalls nehmen wir zunächst an, dass der wahre Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3" in der Grundgesamtheit bekannt sei:

ÜA 5: In einer Grundgesamtheit von $N = 1\,000$ Studierenden haben 400 Studierende die Mathenote 3. Anhand einer Stichprobe (m.Z.) mit $n = 50$ soll der wahre Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3" in der Stichprobe geschätzt werden.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe

a) der gleiche Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3" vorliegt wie in der Grundgesamtheit

b) der Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3" zwischen 30 % und 50 % liegt.

Hinweis: Verwenden Sie die Binomialverteilung und die Datei zgs.xlsm.

gegeben: 1) $\pi = 0,4$: Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3" in der Grundgesamtheit ($N = 1\,000$), da 400 von 1 000 Studierenden die Mathenote 3 haben

2) ZV X: Anzahl der Studierenden mit „Mathenote 3" einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$

$X \sim B(X \,|\, n, \pi) = B(X \,|\, 50; 0,4)$

gesucht: a) $P(X = 20)$ [$\hat{=}\, P(P = 0,4)$]

b) $P(15 \leq X \leq 25)$ [$\hat{=}\, P(0,3 \leq P \leq 0,5)$]

In der Stichprobe von $n = 50$ Studierenden ist theoretisch jede Aufteilung von Studierenden mit „Mathenote 3“ und Studierenden mit „nicht Mathenote 3“ möglich. Da die wahre Aufteilung der Grundgesamtheit bekannt ist, können wir die theoretischen Verteilungen berechnen, mit der jede Aufteilung von Studierenden mit „Mathenote 3“ und Studierenden mit „nicht Mathenote 3“ in der Stichprobe auftritt.

Wie in ÜA 1 Seite 7 verdeutlicht, ist die Zufallsvariable X: Zahl der Studierenden mit „Mathenote 3“ binomialverteilt beim zufälligen Ziehen m.Z.. D.h.: Die Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass in einer Stichprobe (m.Z.) vom Umfang $n = 50$ die Zahl der Studierenden mit „Mathenote 3“ gerade $x = 0, 1, \ldots, 50$ beträgt, wenn in der Grundgesamtheit der Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ π beträgt. Z.B. ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe 20 Studierende mit „Mathenote 3“ enthalten sind[6]

a) $\quad P(X = 20) = \binom{50}{20} \cdot 0,4^{20} \cdot 0,6^{30} = 0,115$, also 11,5%.

Die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Fälle $x = 0, 1, \ldots, 50$ können z.B. aus zgs.xlsm $\longrightarrow$ Binomialverteilung mit den Werten $\pi = 0,4$ und $n = 50$ berechnet werden. Aus der Tabelle und dem Diagramm ist zu erkennen:

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe mit 50 Studierenden der gleiche Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ wie in der Grundgesamtheit vorliegt, beträgt nur
$P(X = 20) = 0,115$, also 11,5%.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe mit 50 Studierenden ein Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ zwischen 30% und 50% vorliegt, beträgt:
$P(X = 15) + P(X = 16) + P(X = 17) + \ldots + P(X = 23) + P(X = 24) + P(X = 25) = 0,889$, also 88,9%.
$\big[$Diese Aufgabe kann auch mit dem ZGS gelöst werden, vgl. ÜA 7 $\Longrightarrow$ $P(15 \leq X \leq 25) = P(-1,4434 \leq Z \leq 1,4434) = 2 \cdot 0,9254 - 1 = 0,8511$, also 85,11% $\longrightarrow$ Fehler ca. 3,8%, da die Lsg. mit dem ZGS nur approximativ gilt.$\big]$

- Es ist sehr unwahrscheinlich, dass nur 6 Studierende oder weniger (d.h. nur 12% oder weniger) bzw. 36 Studierende oder mehr (d.h. 72% oder mehr) mit „Mathenote 3“ in der Stichprobe mit 50 Studierenden enthalten sind.

Wie man sieht, ist die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe mit 50 Studierenden genau denselben Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ wie in der Grundgesamtheit zu haben, nicht besonders groß, nur $P(X = 20) = 0,115$, also 11,5%. Auf der anderen Seite ist es sehr unwahrscheinlich, dass die Aufteilung in der Stichprobe sehr weit von der tatsächlichen Aufteilung in der Grundgesamtheit entfernt liegt.

Aber: Selbst wenn man den wahren Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ nicht kennt, und z.B. von einem Anteil $\pi = 0,8$ ausgehen würde, so sieht man, dass in einer Stichprobe vom

[6] Beachte: Eigentlich wurden diese Wahrscheinlichkeiten im Bsp. Seite 7 mit „klein“ $p(x)$ bezeichnet, also $p(20) = \ldots$, aber die Schreibweise, die jetzt verwendet wird, ist üblich. Darf aber nicht verwechselt werden mit $P(X \leq 20)$. D.h.: $p(20) = P(X = 20)$ beschreibt den Wert der Dichtefunktion und $P(X \leq 20)$ den Wert der Verteilungsfunktion!!

Umfang $n = 50$ ein wahrer Anteil von 40% (d.h. 20 Studierende) mit „Mathenote 3“ dermaßen unwahrscheinlich ist, dass man dies beruhigt ausschließen kann (vgl. zgs.xlsm $\longrightarrow$ Binomialverteilung mit den Werten $\pi = 0,8$ und $n = 50$).

Bsp. für den heterograden Fall

Aus einer Stichprobe von $N = 1\,000$ Studierenden wird eine Stichprobe (m.Z.) von $n = 50$ Studierenden gezogen. Dabei betragen die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien $\bar{x} = 27,4$ €. Dann stellt sich die Frage: „Wie gut kann man von den durchschnittlichen Ausgaben für Kopien $\bar{x}$ der Stichprobe auf die wahren durchschnittlichen Kopierausgaben μ der Grundgesamtheit schließen?“ D.h.: Wie gut kann man μ durch $\bar{x}$ schätzen? Wir zeigen: Wenn man das gegebene arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Stichprobe für die Schätzung des wahren arithmetischen Mittels μ verwendet, so kann man ein Intervall angeben, in dem das wahre, unbekannte arithmetische Mittel μ mit großer Wahrscheinlichkeit liegen wird (vgl. Repräsentationsschluss FS, Seite 20). Zur Beantwortung der Frage und der Erläuterung des Intervalls nehmen wir zunächst an, dass das wahre aritmetische Mittel sowie die wahre Varianz der Kopierausgaben in der Grundgesamtheit bekannt sei:

ÜA 6: In einer normalverteilten Grundgesamtheit von $N = 1\,000$ Studierenden betragen die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien pro Semester $\mu = 27$ € bei einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ €. Es wird eine Zufallsstichprobe (m.Z.) im Umfang von $n = 50$ ($n = 100$) gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien

a) 28 € oder weniger

b) mehr als 25,5 €

c) zwischen 24 € und 30 €

betragen.

gegeben: 1) $\mu = 27,\ \sigma^2 = 100$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien und Varianz der Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit ($N = 1\,000$)

2) ZV $\overline{X}$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$ ($n = 100$)

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ Reproduktivität der Normalverteilung

gesucht: a) $P(\overline{X} \leq 28)$

b) $P(\overline{X} > 25,5)$

c) $P(24 < \overline{X} \leq 30)$

Unter der Annahme, dass die Grundgesamtheit X „Ausgaben für Kopien“ normalverteilt ist, also $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ist – beim zufälligen Ziehen m.Z. (also unabhängige Zufallsvariablen) – auch die Zufallsvariable $\overline{X}$ normalverteilt mit $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ (Reproduktivität der Normalverteilung, Buch, Seite 126). Wir nehmen also an, dass diese Annahme erfüllt ist (obwohl eigentlich eine eher linkssteile Kurve anzunehmen wäre! $\Longrightarrow$ systematischer Fehler!). Da $n > 30$ können wir uns aber auch beim zufälligen Ziehen m.Z. auf den Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy beziehen (Buch, Seite 129, s.u.), d.h. auch ohne, dass die Voraussetzung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ erfüllt ist, gilt bei großem Stichprobenumfang $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Die Normalverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass – bei bekannten Werten der Grundgesamtheit $\mu = 27$ und $\sigma^2 = 100$ – zufällig $n = 50$ Studierende (m.Z.) gezogen werden, deren durchschnittliche Ausgaben für Kopien 28 € oder weniger, mehr als 25,5 € zwischen 24 € und 30 € betragen (Berechnung vgl. FS, Seite 17/18)):[7]

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \implies \text{Standardisierung: } Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

a) $\bar{x} = 28 \implies z = \dfrac{28-27}{10}\sqrt{50} = 0,7071 \qquad \implies$ FS, Seite 18 linke Grafik

$P(\overline{X} \leq 28) = P(Z \leq 0,7071) = \Phi(0,7071) = 0,7602$, also 76,02%.

b) $\bar{x} = 25,5 \implies z = \dfrac{25,5-27}{10}\sqrt{50} = -1,0607 \qquad \implies$ FS, Seite 18 mittlere Grafik

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 25,5) = 1 - P(X \leq 25,5) &= 1 - P(Z \leq -1,0607) = 1 - \Phi(-1,0607) \\ &= 1 - [1 - \Phi(1,0607)] = \Phi(1,0607) = 0,8556, \\ &\ \text{also } 85{,}56\%. \end{aligned}$$

c) $\bar{x} = 24 \implies z = \dfrac{24-27}{10}\sqrt{50} = -2,1213$

$\bar{x} = 30 \implies z = \dfrac{30-27}{10}\sqrt{50} = 2,1213 \implies$

$$\begin{aligned} P(24 < \overline{X} \leq 30) &= P(-2,1213 < Z \leq 2,1213) \qquad \implies \text{FS, Seite 18 rechte Grafik} \\ &= 2 \cdot \Phi(2,1213) - 1 \\ &= 2 \cdot 0,9831 - 1 = 0,9662, \text{ also } 96{,}62\%. \end{aligned}$$

Es ist sehr unwahrscheinlich, dass in der Stichprobe mit 50 Studierenden die durchschnittlichen Kopierausgaben nur 24 € oder weniger bzw. mehr als 30 € betragen denn:
$P(\overline{X} \leq 24 \text{ oder } \overline{X} > 30) = 1 - 0,9662 = 0,0338$, also 3,38%.

Würde man einen größeren Stichprobenumfang wählen, z.B. $n = 100$, so wird das Stichprobenergebnis wahrscheinlicher (vgl. auch Buch, Seite 119, hier Seite 15: Je höher der Stichprobenumfang – nicht der Auswahlsatz $\frac{n}{N}$, sofern N groß (Praxis: $\frac{n}{N} < 0,05$) – desto weniger streuen die möglichen Stichprobenergebnisse $\bar{x}$.):

a) $P(\overline{X} \leq 28) = F(\overline{X} \leq 28) = \Phi(Z \leq \dfrac{28-27}{10}\sqrt{100}) = \Phi(1) = 0,84133$, also 84,13%.

[7] Für die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittlichen Ausgaben in der Stichprobe mit 50 Studierenden genauso groß sind wie in der Grundgesamtheit, würde man den Wert der Dichtefunktion der Normalverteilung bestimmen:
$P(\overline{X} = 27) = f(27) = \frac{\sqrt{50}}{10}\varphi(\frac{27-27}{10}\sqrt{50}) = 0,7071 \cdot \varphi(0) = 0,7071 \cdot 0,3989 = 0,2821$, also nur ca 28,21%.
Beachte (vgl. Buch, Seite 123): Der Wert der Dichtefunktion von z muss durch $\sigma_{\overline{X}}$ dividiert werden!

b) $P(\overline{X} > 25,5) = 1 - P(\overline{X} \leq 25,5) = 1 - \Phi(Z \leq \frac{25,5-27}{10}\sqrt{100}) = 1 - \Phi(-1,5)$
$= \Phi(1,5) = 0,9332$, also 93,32%.

c) $$\begin{aligned} P(24 < \overline{X} \leq 30) &= P(\frac{24-27}{100}\sqrt{50} < Z \leq \frac{30-27}{10}\sqrt{100}) \\ &= P(-3 \leq Z \leq 3) \\ &= 2 \cdot \Phi(3) - 1 \\ &= 2 \cdot 0,99865 - 1 = 0,9973, \text{ also } 99{,}73\%. \end{aligned}$$

(Vergleichbare Übungsaufgabe 13b, FS, Seite 18, Buch, Seite 134)

Exkurs: Homograder Fall: Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung:

Die hypergeometrische Verteilung ist das Modell zur Darstellung des „Ziehens ohne Zurücklegen“. Die Binomialverteilung ist das Verteilungsmodell zur Darstellung des „Ziehens mit Zurücklegen“. Bei einer entsprechend großen Grundgesamtheit spielt es keine große Rolle, ob das Ziehen mit oder ohne Zurücklegen stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Element mehrmals gezogen wird ist so gering, dass man sie vernachlässigen kann. Aus diesem Grund kann bei großen Grundgesamtheiten statt der hypergeometrischen Verteilung die Binomialverteilung verwendet werden und daher wurde hier nur der Fall m.Z. betrachtet.

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung: Aber auch die Binomialverteilung kann durch eine noch einfacher zu handhabende Verteilung gut beschrieben werden, nämlich die Normalverteilung. Voraussetzung dafür ist ein genügend großer Stichprobenumfang, als Faustregel gilt: $n \cdot \pi(1-\pi) \geq 9$. Vgl. Grenzwertsatz von Moivre und Laplace, Buch, Seite 127, bzw. Anwenden von zgs.xlsm $\longrightarrow$ Binomialverteilung mit den Werten $\pi = 0,4$ und steigenden n-Werten.

- Grenzwertsatz von Moivre und Laplace

$$X \sim B(x|n,\pi) \overset{a}{\sim} N[n\pi, n\pi(1-\pi)] \quad \text{für } n\pi(1-\pi) \geq 9$$

ÜA 7: Bsp. für den Grenzwertsatz von Moivre und Laplace

Aus einer großen Grundgesamtheit mit 40% Studierenden mit „Mathenote 3“ werden zufällig 50 Studierende gezogen. Bestimmen Sie mit dem Grenzwertsatz von Moivre und Laplace die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Stichprobe zwischen 17 und 23 Studierende mit „Mathenote 3“ enthalten sind.

gegeben: 1) Große Grundgesamtheit mit: $\pi = 0,4$, $\left[\sigma = \sqrt{0,4 \cdot 0,6} = 0,49 \text{ (vgl. Buch, S. 121)}\right]$

2) ZV X: Anzahl der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$

$X \overset{a}{\sim} N[n\pi, n\pi(1-\pi)] = N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 20$ und $\sigma^2 = 12 > 9$ (s.u.)

gesucht: $P(17 < X \leq 23)$

Stichprobe: $n = 50$, $E(X) = n \cdot \pi = 50 \cdot 0,4 = 20$, $Var(X) = n \cdot \pi(1-\pi) = 50 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 12$ (vgl. ÜA 1 bzw. Buch, Seite 121), deshalb

$$x_1 = 17 \implies z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{17-20}{\sqrt{12}} = -0,866$$

$$x_2 = 23 \implies z_2 = \frac{23-20}{\sqrt{12}} = 0,866 \implies$$

$P(17 < X \leq 23) = P(-0,866 < Z \leq 0,866) = 2 \cdot \Phi(0,866) - 1 = 2 \cdot 0,80675 - 1 = 0,6135$, also 61,35%.

- Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \overset{a}{\sim} N(0,1) \text{ mit } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{für } n > 30 \text{ bzw. in der Praxis für } n \geq 100$$

ÜA 8: Bsp. für den Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy

Für die Studierenden an allen DHBWs betragen die pro-Kopf-Ausgaben für Kopien pro Semester $\mu = 27$ bei $\sigma = 10$. Prüfen Sie mit dem Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy, ob ein Stichprobenergebnis von $\bar{x} = 28$ € bei $n = 1\,000$ möglich ist.

gegeben: 1) $\mu = 27$, $\sigma^2 = 100$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien und Varianz der Ausgaben für Kopien in der großen (d.h.: m.Z.) Grundgesamtheit

2) ZV $\overline{X}$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 1\,000$

$$\overline{X} \overset{a}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \text{ d.h: } Z \overset{a}{\sim} N(0,1) \text{ mit } Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}, \text{ da } n > 100$$

Beachte: Im Unterschied zur Reproduktivität der Normalverteilung, bei der die Voraussetzung ist, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist [$N(\mu, \sigma^2)$], wird hier *keine* Voraussetzung über die Verteilung der Grundgesamtheit getroffen, sondern lediglich gefordert, dass die ZVen $X_1, \ldots, X_n$ alle die gleiche Verteilungsfunktion mit μ und σ^2 haben.

gesucht: $P(\overline{X} \geq 28)$

$$\bar{x} = 28 \implies z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{28-27}{10}\sqrt{1\,000} = 3,1623$$

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geq 28) &= 1 - P(\overline{X} < 28) = 1 - P(Z < 3,1623) \\ &= 1 - \Phi(3,1626) = 1 - 0,9992 = 0,0008. \end{aligned}$$

D.h.: Nur 0,08% der Ergebnisse würden mit 28 € oder höher ausfallen, es wäre also ein sehr unwahrscheinliches Ergebnis.

5 Induktive Statistik

5.1 Grundlagen des Testens und Schätzens

Bei allen folgenden Beispielen werden die Annahmen verwendet:

1a) Es wird der Fall einer Zufallsauswahl m.Z. betrachtet oder

1b) der Umfang der Grundgesamtheit N ist so groß, dass beim Ziehen einer Zufallsstichprobe der Fall m.Z. unterstellt werden kann.

Homograder Fall: π: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 in der Grundgesamtheit

2) Die Grundgesamtheit von X „Anzahl der Studierenden mit Mathenote 3“ ist binomialverteilt mit $E(X) = n\pi$ und $Var(X) = n\pi(1-\pi)$ bzw. die Grundgesamtheit von P „Anteil der Studierenden mit Mathenote 3“ ist binomialverteilt mit $E(P) = \pi$ und $Var(P) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$, aber der Stichprobenumfang n ist so groß, d.h. $n\pi(1-\pi) \geq 9$, dass davon ausgegangen werden kann, dass die Zufallsvariable X normalverteilt ist (ZGS), d.h. $X \overset{a}{\sim} N[n\pi, n\pi(1-\pi)]$ bzw. P normalverteilt ist (ZGS), d.h. $P \overset{a}{\sim} N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$.

Beim Hochschließen wird wegen der Erwartungstreue die Stichprobenvarianz verwendet (ÜA 11):

$$P \overset{a}{\sim} N\left(\hat{\pi}, \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1}\right) = N\left(p, \frac{p(1-p)}{n-1}\right).$$

Heterograder Fall: μ: durchschnittliche Ausgaben für Kopien pro Semester in der Grundgesamtheit,
σ^2: Varianz der Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit

2a) Die Grundgesamtheit von X „Ausgaben der Kopien pro Semester“ ist annähernd normalverteilt mit $E(X) = \mu$ und $Var(X) = \sigma^2$, so dass aufgrund der Reproduktivität der Normalverteilung die ZV $\overline{X}$ „durchschnittliche Ausgaben der Kopien pro Semester“ normalverteilt ist mit $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ oder

2b) die Grundgesamtheit ist beliebig verteilt mit $E(X) = \mu$ und $Var(X) = \sigma^2$, aber der Stichprobenumfang n ist so groß, d.h. $n > 30$ (in der Praxis wird allerdings $n \geq 100$ gefordert!), dass davon ausgegangen werden kann, dass die Zufallsvariable $\overline{X}$ normalverteilt ist (ZGS), d.h. $\overline{X} \overset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Bsp. für homograden Fall

Wie bereits erwähnt, ist in der Praxis die wahre Aufteilung π in der Grundgesamtheit unbekannt. Trotzdem nehmen wir nocheinmal an, dass der Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ in der Grundgesamtheit bekannt sei. Wir wollen nun *vor* der Stichprobenanalyse wissen, in welchem Bereich die Zahl der Studierenden mit „Mathenote 3“ höchstwahrscheinlich liegen wird. Mit „höchstwahrscheinlich“ setzen wir einen Sicherheitsgrad von 95,45%, d.h. $(1-\alpha) = 0,9545$, d.h eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$, d.h. 4,55% fest.

ÜA 9: Aus einer großen Grundgesamtheit mit 40% Studierenden mit „Mathenote 3“ werden zufällig 50 Studierende gezogen (entsprechen den Werten der ÜA 5).

Bestimmen Sie – *vor* der Stichprobenanalyse – das Intervall, in dem die Zahl der Studierenden mit „Mathenote 3“ höchstwahrscheinlich liegen wird. Mit „höchstwahrscheinlich“ setzen wir einen Sicherheitsgrad von 95,45%, d.h. $(1-\alpha) = 0,9545$ voraus.

gegeben: 1) $\pi = 0,4$: wahrer Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 in der Grundgesamtheit

2) ZV X: Anzahl der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$

$[X \overset{a}{\sim} N[n\pi, n\pi(1-\pi)] = N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 20$ und $\sigma^2 = 12 > 9$ (vgl. ÜA 7) $\Longrightarrow$ rote Formel (s.u.)]

3) $1-\alpha = 0,9545$

gesucht: Intervall, in dem – bei einer Stichprobe von 50 Studierenden – das Stichprobenergebnis „Anzahl der Studierenden mit Mathenote 3“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% liegt.

Vgl. Buch, Seite 125 oder FS, Seite 18: $(1-\alpha) = 0,9545 \quad \Longrightarrow$

$$P(-z_1 \leq Z \leq z_1) = 2 \cdot \Phi(z_1) - 1 = 1 - \alpha = 0,9545 \quad \Longrightarrow$$

$2 \cdot \Phi(z_1) = 1,9545 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(z_1) = 0,97725 \quad \Longrightarrow \quad z_1 = 2$ (vgl. Buch, Seite 309, FS, Seite 37).

Dieser z_1-Wert wird als $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$-Wert bezeichnet, da die Bestimmung von z auch so erfolgen kann:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,0455}{2} = 0,97725 = \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \quad \Longrightarrow \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.$$

Mit den Werten dieser Aufgabe ergibt sich aus der Formel vgl. FS, Seite 20 bzw. Buch, Seite 139 (Inklusionsschluss: Prognoseintervall) für $\mu = n\pi$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot \pi(1-\pi)}$ (vgl. ÜA 7):

$$P\left(n\pi - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n \cdot \pi(1-\pi)} \leq X \leq n\pi + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n \cdot \pi(1-\pi)}\right) = 1 - \alpha \quad \Longrightarrow$$

$$P(20 - 2 \cdot \sqrt{12} \leq X \leq 20 + 2 \cdot \sqrt{12}) = 0,9545 \quad \Longrightarrow$$

$$13,07 \leq X \leq 26,93.$$

D.h.: Bei einer Stichprobe von 50 Studierenden kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% sagen, dass die Anzahl der Studierenden mit „Mathenote 3“ zwischen $13,07$ und $26,93$ liegt.

Alternativ kann die Formel für den Anteilswert angewandt werden, d.h.

ZV P: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$

$$[P \overset{a}{\sim} N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \text{rote Formel (s.u.)}]$$

Dann folgt aus der Formel vgl. FS, Seite 20 bzw. Buch, Seite 140 (Inklusionsschluss) für $\mu = \pi$ und $\sigma = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$:

$$P\left(\pi - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \leq P \leq \pi + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1-\alpha \implies$$

$$P\left(0,4 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{50}} \leq P \leq 0,4 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{50}}\right) = 0,9545 \implies$$

$$0,2614 \leq P \leq 0,5386.$$

D.h.: Bei einer Stichprobe von 50 Studierenden kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% sagen, dass der Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ zwischen 26,14% und 53,86% liegt.

Bsp. für heterograden Fall

Wie bereits erwähnt, sind in der Praxis die wahren durchschnittlichen Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit unbekannt. Trotzdem nehmen wir nocheinmal an, dass die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit bekannt seien. Wir wollen nun *vor* der Stichprobenanalyse wissen, in welchem Bereich die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien höchstwahrscheinlich liegen werden. Mit „höchstwahrscheinlich“ setzen wir einen Sicherheitsgrad von 95,45%, d.h. $(1-\alpha) = 0,9545$, d.h eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$, d.h. 4,55% fest.

ÜA 10: Aus einer großen Grundgesamtheit mit den durchschnittlichen Ausgaben für Kopien $\mu = 27$ und der Standardabweichung $\sigma = 10$ werden zufällig 50 Studierende gezogen (entsprechen den Werten der ÜA 6 Seite 21).

Bestimmen Sie – *vor* der Stichprobenanalyse – das Intervall, in dem die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien höchstwahrscheinlich liegen werden, d.h. $(1-\alpha) = 0,9545$.

gegeben: 1) $\mu = 27$, $\sigma^2 = 100$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien und Varianz der Ausgaben für Kopien in der großen (d.h.: m.Z.) Grundgesamtheit

2) ZV $\overline{X}$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$

$[\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \implies$ rote Formel (s.u.)]

3) $1-\alpha = 0,9545$

gesucht: Intervall, in dem das Stichprobenergebnis „durchschnittliche Ausgaben für Kopien der 50 Studierenden“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% liegt.

Vgl. ÜA 9: Aus $(1-\alpha) = 0,9545$ folgt $z = 2$.

Mit den Werten der Aufgabe ergibt sich aus der Formel vgl. FS, Seite 20 bzw. Buch, Seite 139 (Inklusionsschluss: Prognoseintervall):

$$P\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \implies$$

$$P\left(27-2\cdot\frac{10}{\sqrt{50}}\leq\overline{X}\leq 27+2\cdot\frac{10}{\sqrt{50}}\right)=0{,}9545 \implies$$

$$24{,}17\leq\overline{X}\leq 29{,}83.$$

D.h.: Bei einer Stichprobe von 50 Studierenden kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% sagen, dass die durchschnittlichen Kopierausgaben zwischen 24,17 € und 29,83 € liegen.

5.2 Schätzverfahren

Bsp.: für homograden Fall

Nun trennen wir uns von der Annahme, dass wir den wahren Anteil π kennen und berechnen das obige – um die Stichprobenstandardabweichung korrigierte – Intervall *für alle möglichen Anteile* in der Grundgesamtheit $0\leq\pi\leq 1$ (vgl. Repräsentationsschluss, Buch, Seite 140, FS, Seite 20 bzw. Grafik Buch, Seite 150). Dann kann man zeigen: Wenn der Stichprobenanteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ in einer Stichprobe vom Umfang $n=50$ gerade 40% beträgt, so liegt der Anteil der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% im Intervall [26%;54%] – (s.u.). D.h.: 95,45% der Intervalle der Länge $\pm 2\cdot\sigma_p$ um die in n Stichproben gezogenen p_i-Werte überdecken den Wert π, Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ in der Grundgesamtheit.

D.h.: Da wir den Stichprobenwert p als Schätzwert für den wahren unbekannten Wert π verwenden, d.h. $\hat{\pi}=p$, muss jetzt – wegen der Erwartungstreue beim Hochrechnen – zur Ermittlung der Standardabweichung des Anteils die Formel

$$\hat{\sigma}_p=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}$$

verwendet werden (Buch, Seite 145). Dann folgt: Liefert eine Stichprobe den Anteilswert p, so liegt der Anteil π der Grundgesamtheit mit einem Sicherheitsgrad von $(1-\alpha)=0{,}9545$, d.h. $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2$, im sog.

- **Konfidenzintervall** (vgl. Buch, Seite 162, FS, Seite 23), d.h.:

$$p-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}\leq\pi\leq p+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}.$$

Mit der Bestimmung des Konfidenzintervalls kann folgendes Problem gelöst werden:

ÜA 11: An einer Fakultät der DHBW seien 1 000 Studierende. Der Dekan der Fakultät möchte wissen, wie viele der Studierenden die Mathenote 3 haben. Dazu wird eine Stichprobe von 50 Studierenden gezogen und die Anzahl derjenigen erfasst, die die Mathenote 3 haben, mit dem Ergebnis: 20 Studierende haben die Mathenote 3.

Wie groß ist der Anteil der Studierenden mit der Mathenote 3 in der Grundgesamtheit bei einem Sicherheitsgrad von $(1-\alpha)=0{,}9545$?

gegeben: 1) $N = 1\,000$: Anzahl der Studierenden der Grundgesamtheit

2) ZV P: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$ und dem Ergebnis $p = 0{,}4 = \hat{\pi}$ (20 von 50 Studierenden)

$[P \overset{a}{\sim} N\left(\hat{\pi}, \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1}\right) = N\left(p, \frac{p(1-p)}{n-1}\right)$ (vgl. ÜA 7) $\Longrightarrow$ rote Formel (s.u.)]

3) $1-\alpha = 0{,}9545$

gesucht: Intervall, in dem – bei einer Grundgesamtheit von 1 000 Studierenden – der wahre unbekannte Anteil π der Studierenden mit Mathenote 3 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% liegt.

Vgl. ÜA 9: Aus $(1-\alpha) = 0{,}9545$ folgt $z = 2$.

Mit den Werten der Aufgabe ergibt sich aus der Formel, vgl. FS, Seite 23 bzw. Buch, Seite 162 (Konfidenzintervall):

$$p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \leq \pi \leq p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \quad \Longrightarrow$$

$$0{,}4 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}} \leq \pi \leq 0{,}4 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}} \quad \Longrightarrow$$

$$0{,}26 \leq \pi \leq 0{,}54.$$

D.h.: Der unbekannte, wahre Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 in der Grundgesamtheit liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% im Intervall $[26\%; 54\%]$, d.h. aufgrund der Stichprobe kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% sagen, dass von den 1 000 Studierenden zwischen 260 und 540 Studierende die Mathenote 3 haben.

Ein Konfidenzintervall wird – besonders in der Markt- und Meinungsforschung – bei einem Rückschluss des Ergebnisses einer „repräsentativen“ Stichprobe auf die Grundgesamtheit verwendet, da mit dem Konfidenzintervall (Repräsentationsschluss) die Güte des Ergebnisses beschrieben wird.

Der **Repräsentationsschluss** $P\left(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \leq \pi \leq p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}\right) = 1-\alpha$, d.h. das Hochschließen, bedeutet für das Beispiel, dass – mit einer maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit von 4,55% (also $(1-\alpha) = 0{,}9545$, d.h. $z = 2$) – der durchschnittliche Anteil $\overline{p}$ der n Anteile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von n Stichproben im Intervall $\left[p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}; p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}\right]$ liegt, also im Durchschnitt der Anteil einer Stichprobe im Konfidenzintervall $[0{,}26; 0{,}54]$ liegt. D.h.: Würde man 100 Stichproben ziehen, so würden 95,45 der Fälle mit p im Intervall $\left[p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}; p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}\right]$ liegen und 4,55 Fälle außerhalb des Intervalls. (Schöner wäre die Inerpretation mit ganzen Zahlen, d.h. für $z = 1{,}96$, d.h. $1-\alpha = 0{,}95$, da dann 95 der 100 Fälle mit p im Konfidenzintervall und 5 Fälle außerhalb des Konfidenzintervalls liegen würden).

ÜA 12: An einer DHBW am Standort XY seien 4 000 Studierende. Eine Stichprobe im Umfang von 500 Studierenden ergibt, dass 190 die Mathenote 3 haben.

Mit welcher Sicherheitswahrscheinlichkeit liegt an dem betrachteten Standort der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 im Intervall $[36\%, 40\%]$?

gegeben: 1) $N = 4\,000$: Anzahl der Studierenden der Grundgesamtheit

2) ZV P: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 500$ und dem Ergebnis $p = 0,38 = \hat{\pi}$ (d.h. 190 von 500)

$[P \overset{a}{\sim} N\left(\hat{\pi}, \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1}\right) = N\left(p, \frac{p(1-p)}{n-1}\right)$ (vgl. ÜA 7) $\Longrightarrow$ rote Formel (s.u.)]

gesucht: Sicherheitswahrscheinlichkeit $1-\alpha$, dass – bei einer Grundgesamtheit von 4 000 Studierenden – der wahre unbekannte Anteil π der Studierenden mit Mathenote 3 im Intervall $[0,36; 0,40]$ liegt.

Mit den Werten der Aufgabe ergibt sich aus der Formel, vgl. FS, Seite 23 bzw. Buch, Seite 162 (Konfidenzintervall):

$$1-\alpha = P\left(\underbrace{p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}}_{=0{,}36} \le \pi \le \underbrace{p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}}_{=0{,}40}\right) = 2 \cdot \Phi(z) - 1 \quad \Longrightarrow$$

$$0,36 = 0,38 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{0,38 \cdot 0,62}{499}} \Longrightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{0,38 \cdot 0,62}{499}} = 0,02 \; (= |e|) \Longrightarrow z = 0,92043$$

$$\Longrightarrow \Phi(z) = 0,8213 \Longrightarrow 1-\alpha = 2 \cdot \Phi(z) - 1 = 2 \cdot 0,8213 - 1 = 0,6426.$$

D.h.: Der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 in der Grundgesamtheit liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 64,26% im Intervall $[36\%; 40\%]$, d.h. aufgrund der Stichprobe kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 64,26% sagen, dass von den 4 000 Studierenden zwischen 1 440 und 1 600 Studierende die Mathenote 3 haben.

Bsp.: für heterograden Fall

Nun trennen wir uns von der Annahme, dass wir das wahre arithmetische Mittel μ und die wahre Varianz σ^2 kennen und berechnen das obige – um die Stichprobenstandardabweichung korrigierte – Intervall *für alle möglichen arithemtischen Mittel* μ in der Grundgesamtheit bei gleichbleibender Varianz σ^2 (vgl. Repräsentationsschluss, Buch, Seite 140, FS, Seite 20). Dann kann man zeigen: Wenn das Stichprobenmittel der Studierenden in einer Stichprobe vom Umfang $n = 50$ gerade 27 € beträgt, so liegt das arithmetische Mittel der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% im Intervall (24,14;29,86) – (s.u.). D.h.: 95,45% der Intervalle überdecken den Wert μ, durchschnittliche Kopierausgaben, in der Grundgesamtheit.

D.h.: Da wir das Stichprobenmittel $\bar{x}$ als Schätzwert für den wahren unbekannten Wert μ verwenden, d.h. $\hat{\mu} = \bar{x}$, muss jetzt – wegen der Erwartungstreue beim Hochrechnen – zur Ermittlung der Standardabweichung des arithmetischen Mittels die Formel

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{bzw.} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2}$$

verwendet werden (Buch, Seite 145).[8]

Dann folgt: Liefert eine Stichprobe das arithemtische Mittel $\bar{x}$, so liegt das arithmetische Mittel μ der Grundgesamtheit mit einem Sicherheitsgrad von $(1-\alpha) = 0,9545$, d.h. $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2$, im sog.

- **Konfidenzintervall** (vgl. Buch, Seite 162), d.h.:

  $\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}.$

Mit der Bestimmung des Konfidenzintervalls kann folgendes Problem gelöst werden: (vergleichbare Übungsaufgabe 14b, FS, Seite 20, Buch, Seite 141/142

ÜA 13: An einer Fakultät der DHBW seien 1 000 Studierende. Man möchte wissen, wie hoch die pro-Kopf-Ausgaben für Kopien im Semester sind. Dazu wird eine Stichprobe von 50 Studierenden gezogen mit dem Ergebnis: $\sum x_i = 1\,350$ und $\sum x_i^2 = 41\,450$.

Wie groß sind die pro-Kopf-Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit bei einem Sicherheitsgrad von $(1-\alpha) = 0,9545$?

gegeben: 1) $N = 1\,000$: Anzahl der Studierenden der Grundgesamtheit

2) ZV $\overline{X}$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 50$ und dem Ergebnis: $\sum x_i = 1\,350$ und $\sum x_i^2 = 41\,450$

[$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ $\Longrightarrow$ rote Formel für Konfidenzintervall (s.u.)]

3) $1-\alpha = 0,9545$

gesucht: Intervall, in dem – bei einer Grundgesamtheit von 1 000 Studierenden – die wahren unbekannten durchschnittlichen Ausgaben für Kopien μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% liegen.

Vgl. ÜA 9: Aus $(1-\alpha) = 0,9545$ folgt $z = 2$.

$$n = 50, \quad \bar{x} = \frac{1\,350}{50} = 27 = \hat{\mu}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2 = \frac{1}{49}\cdot 41\,450 - \frac{50}{49}\cdot 27^2 = 102,0408 \Longrightarrow s = 10,1015 \Longrightarrow$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{10,1015}{\sqrt{50}} = 1,4286$$

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} \Longrightarrow$$

$$27 - 2\cdot 1,4286 \leq \mu \leq 27 + 2\cdot 1,4286 \Longrightarrow$$

[8] In den obigen Beispielen des heterograden Falls, in denen $\sigma = 10$ gegeben war, wurde σ^2 aus der gegebenen Summe $\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ bzw. $\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$ bestimmt (allerdings wurde dieser Rechenweg nicht vorgeführt, sonder gleich das Ergebnis von σ^2 genannt, man hätte aber auch stattdessen $\sum x_i = 1\,350$ und $\sum x_i^2 = 41\,450$ vorgeben können). Werden jetzt aber konkret für eine Stichprobe die Summe $\sum(x_i-\bar{x})^2$ oder aber die Summen $\sum x_i^2$ und $\sum x_i$ vorgegeben, so muss die hier beschriebene Formel zur Bestimmung der Stichprobenvarianz verwendet werden.

$24,14 \leq \mu \leq 29,86$.

D.h.: Die wahren, unbekannten pro-Kopf-Ausgaben für Kopien der 1 000 Studierenden (Grundgesamtheit) liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% im Intervall $[24,14;29,86]$, d.h. aufgrund der Stichprobe kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% sagen, dass ein Studierender der 1 000 Studierenden im Durchschnitt 24,14 € bis 29,86 € pro Semester ausgibt bzw. die Gesamtausgaben für Kopien aller 1 000 Studierenden zwischen 24 140 € und 29 860 € betragen.

Ein Konfidenzintervall wird – besonders in der Markt- und Meinungsforschung – bei einem Rückschluss des Ergebnisses einer „repräsentativen" Stichprobe auf die Grundgesamtheit verwendet, da mit dem Konfidenzintervall (Repräsentationsschluss) die Güte des Ergebnisses beschrieben wird.

Der **Repräsentationsschluss** $P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}\right) = 1-\alpha$, d.h. das Hochschließen, bedeutet für das Beispiel, dass – mit einer maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit von 4,55% (also $(1-\alpha)= 0,9545$, d.h. $z=2$) – das arithmetische Mittel $\bar{\bar{x}}$ der n arithmeitschen Mittel $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ von n Stichproben im Intervall $\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}\right]$ liegt, also im Durchschnitt das arithmetische Mittel einer Stichprobe im Konfidenzintervall $[24,14;29,86]$ liegt.

ÜA 14: An einer DHBW am Standort XY seien 4 000 Studierende. Eine Stichprobe von 1 000 Studierenden ergibt für die Kopierausgaben den Mittelwert 27,4 € und die Standardabweichung $s = 8$ €. Mit welcher Sicherheitswahrscheinlichkeit liegen die durchschnittlichen Kopierausgaben der Studierenden an dem Standort im Intervall [27 €;27,8 €]?

gegeben: 1) $N = 4000$: Anzahl der Studierenden der Grundgesamtheit

2) ZV $\bar{X}$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 1000$ und dem Ergebnis: $\bar{x} = 27,4 = \hat{\mu}$ sowie $s = 8 = \hat{\sigma}$

$[\bar{X} \overset{a}{\sim} N(\hat{\mu}, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}) = N(\bar{x}, \frac{s^2}{n}), \implies$ rote Formel für Konfidenzintervall (s.u.)]

gesucht: Sicherheitswahrscheinlichkeit $1-\alpha$, dass die wahren unbekannten durchschnittlichen Ausgaben für Kopien μ der Grundgesamtheit im Intervall $[27;27,8]$ liegen.

Mit den Werten der Aufgabe ergibt sich aus der Formel, vgl. FS, Seite 23 bzw. Buch, Seite 162 (Konfidenzintervall):

$$1-\alpha = P\left(\underbrace{\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}_{=27} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}_{=27{,}8}\right) = 2 \cdot \Phi(z) - 1 \implies$$

$$27 = 27{,}4 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{1000}} \implies z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{1000}} = 0{,}4 \; (= |e|) \implies z = 1,581 \implies$$

$$\Phi(z) = 0,943 \implies 1-\alpha = 2 \cdot \Phi(z) - 1 = 2 \cdot 0,943 - 1 = 0,886.$$

D.h.: Die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien der Grundgesamtheit liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 88,6% im Intervall $[27;27,8]$, d.h. aufgrund der Stichprobe kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von 88,6% sagen, dass ein Studierender der DHBW am Standort X im Durchschnitt 27 € bis 27,8 € pro Semester ausgibt.

5.2.1 Zufallsstichprobenplanung und -auswertung bei einfacher Zufallsauswahl

Bei der Stichprobenplanung und -auswertung wird wie folgt vorgegangen (vgl. Buch, Seite 144f, FS, Seite 21)

1. Genauigkeitsvorgabe und Sicherheitswahrscheilichkeit
2. Abschätzung der Varianz (im homograden Fall bedeutet das die Abschätzung des Anteils π für $$Var(P) = \frac{\pi(1-\pi)}{n})$$
3. Bestimmung eines notwendigen Stichprobenumfangs

(4.) Stichprobenzufallsauswahl und Erhebung

5. Hochrechnung
6. Fehlerrechnung
7. Konfidenzintervall.

Um den notwendigen Stichprobenumfang in einer Untersuchung bestimmen zu können, muss man zunächst zwei Dinge festlegen: Den Sicherheitsgrad bzw. die Irrtumswahrscheinlichkeit und die gewünschte Genauigkeit. Die Genauigkeit wird durch den Zufallsfehler beschrieben:

- Zufallsfehler einer Zufallsstichprobe (m.Z.) <u>bei bekanntem π- bzw. σ^2-Wert</u> der Grundgesamtheit

$|e| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$, d.h. $|e| = |p-\pi|$ im homograden Fall (vgl. Konfidenzintervall FS, S. 23)

$|e| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, d.h. $|e| = |\bar{x}-\mu|$ im heterograden Fall (vgl. Konfidenzintervall FS, S. 23).

Da die Varianz σ^2 bzw. der Anteil π der Grundgesamtheit nicht bekannt sind, müssen sie geschätzt werden. Basis dafür können sein

- Pilotstudien (z.B. Test eines Fragebogens)
- alte Erhebungen (z.B. Ergebnisse aus vorangegangenen Wahlen)
- vergleichbare Erhebungen (Untersuchungen zu ähnlichen Sachverhalten)
- ungünstige Abschätzungen (worst case) im homograden Fall: $\pi = 0,5$: Gleichverteilung (größtmögliche Streuung und somit größtmöglicher Zufallsfehler, vgl. auch Homogenitätsindex für $m = 2$ Merkmalsausprägungen). Der Beweis für $\pi = 0,5$ kann auch analytisch geführt werden:

$$\max_{\pi} g(\pi) \;\text{ mit }\; g(\pi) = \sigma'^2 = \pi(1-\pi) = \pi - \pi^2 \implies$$
$$g'(\pi) = 1 - 2\pi = 0 \implies \sigma'^2_{\max} \;\text{ für } \pi = 0,5.$$

Bei der folgenden Bezeichnung werden Variablen, die z.B. aus einer Pilotstudie geschätzt wurden, mit einem Apostroph versehen, so dass die obige Formel für den Zufallsfehler lautet:

- **Zufallsfehler** einer Zufallsstichprobe (m.Z.) bei geschätztem π' bzw. σ'^2 (FS, Seite 21)

$$|e'| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi'(1-\pi')}{n}} \quad \text{im homograden Fall}$$

$$|e'| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \quad \text{im heterograden Fall.}$$

Aus der Auflösung der Formel für den Zufallsfehler nach n kann der notwendige Stichprobenumfang berechnet werden:

- **notwendiger Stichprobenumfang**, um einen gegebenen Zufallsfehler $|e'|$ nicht zu überschreiten (FS, Seite 21)

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\pi'(1-\pi')}{e'^2} \quad \text{im homograden Fall}$$

$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'^2}{e'^2} \quad \text{im heterograden Fall.}$$

Im homograden Fall ergibt sich (m.Z.) für den worst case $\sigma'_{\max} = 0,5$ bei $z = 2$ und $|e'| = 0,02$

$$n \geq 4 \cdot \frac{0,25}{0,0004} = 2\,500.$$

D.h. unabhängig vom Umfang der Grundgesamtheit, ist eine Stichprobe vom Umfang 2 500 ausreichend dafür, dass mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45% die zufällige Abweichung (nach oben bzw. unten) des Anteils einer Stichprobe von dem wahren unbekannten Anteil in der Grundgesamtheit $|e| = 0,02$ beträgt.

Allgemein gilt: Je kleiner der Zufallsfehler sein soll und je kleiner die Irrtumswahrscheinlichkeit sein darf, desto größer muss die Stichprobe sein.

ÜA 15: Aus einer Pilotstudie von Studierenden an der DHBW seien der Anteil $\pi' = 0,4$ der Studierenden „mit Mathenote 3“ bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 0,1 (bzw. 0,05) nicht überschritten werden darf.

$$1-\alpha = 0,9545 \implies z = 2$$

Für $|e'| = 0,1$: $n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\pi'(1-\pi')}{e'^2} = 4 \cdot \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,01} = 96$

Für $|e'| = 0,05$: $n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\pi'(1-\pi')}{e'^2} = 4 \cdot \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,0025} = 384.$

ÜA 16: Über den Anteil π' der Studierenden „mit Mathenote 3“ sei nichts bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 0,1 (bzw. 0,05) nicht überschritten werden darf.

Wir nehmen den worst case an, d.h. (s.o.) die größt mögliche Varianz, d.h. $\pi' = 0,5 \implies$

Für $|e'| = 0,1$: $n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\pi'(1-\pi')}{e'^2} = 4 \cdot \frac{0,25}{0,01} = 100$

$$\text{Für } |e'| = 0,05\text{:} \quad n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\pi'(1-\pi')}{e'^2} = 4 \cdot \frac{0,25}{0,0025} = 400.$$

ÜA 17: Aus einer Pilotstudie von Studierenden an der DHBW seien das arithmetische Mittel $\mu' = 27$ und die Varianz $\sigma'^2 = 100$ der Kopierausgaben bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 2 € (bzw. 1 €) nicht überschritten werden darf.

$$\text{Für } |e'| = 2\text{:} \quad n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'^2}{e'^2} = 4 \cdot \frac{100}{4} = 100$$

$$\text{Für } |e'| = 1\text{:} \quad n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'^2}{e'^2} = 4 \cdot \frac{100}{1} = 400.$$

ÜA 18: Aus einer Pilotstudie von Studierenden an der DHBW seien das arithmetische Mittel $\mu' = 27$ und die Varianz $\sigma'^2 = 100$ der Kopierausgaben bekannt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang, für den mit einem Sicherheitsgrad von 95,45% ein zufälliger Fehler von 5% (bzw. 2%) nicht überschritten werden darf.

$$\text{Für } e'_r = 0,05\text{:} \quad e'_r = \frac{|e'|}{\mu'} = \frac{5}{100} \implies |e'| = \frac{5}{100} \cdot \mu' = \frac{5}{100} \cdot 27 = 1,35$$

$$\implies n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'^2}{e'^2} = 4 \cdot \frac{100}{1,35^2} \approx 220$$

$$\text{Für } e'_r = 0,02\text{:} \quad e'_r = \frac{|e'|}{\mu'} = \frac{2}{100} \implies |e'| = \frac{2}{100} \cdot \mu' = \frac{2}{100} \cdot 27 = 0,54$$

$$\implies n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'^2}{e'^2} = 4 \cdot \frac{100}{0,54^2} \approx 1\,372.$$

Bei der Auswertung (Fehlerrechnung) einer Zufallsstichprobe, die für die Hochrechnung (Repräsentationsschluss, Konfidenzintervall) verwendet wird, wird der – um die Stichprobenstandardabweichung korrigierte – Zufallsfehler bestimmt:

- **aus der Stichprobe geschätzter Zufallsfehler (Stichprobenfehler)**

$$|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \quad \text{für den homograden Fall (Buch, Seite 149)}$$

$$|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{für den heterograden Fall (FS, Seite 21)}$$

$$\text{mit} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{bzw.} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2}.$$

ÜA 19: Aus einer Stichprobe von 200 Studierenden an der DHBW seien der Anteil $p = 0,4$ der Studierenden „mit Mathenote 3" bekannt. Bestimmen Sie den absoluten und prozentualen Stichprobenfehler (m.Z.) bei einer einfachen Zufallstichprobe (Konfidenzniveau 95,45%).

Aus $(1-\alpha) = 0,9545$ folgt $z = 2$ (vgl. ÜA 9).

$$|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{199}} = 0,0695 \implies$$

$$\hat{e}_r \cdot 100 = \frac{|\hat{e}|}{p} \cdot 100 = \frac{0,0695}{0,4} \cdot 100 = 17,364\%,$$

d.h.: Mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45% beträgt die zufällige Abweichung (nach oben bzw. unten) des Anteils $p = 0,4$ der Stichprobe von dem wahren unbekannten Anteil π in der Grundgesamtheit ca. 0,07. Dies entspricht einer prozentualen Abweichung von ca. 17,5%.

ÜA 20: Aus einer Stichprobe von 200 Studierenden an der DHBW erhält man für die Kopierausgaben: $\sum x_i = 5\,400$ und $\sum x_i^2 = 165\,700$. Bestimmen Sie den absoluten und prozentualen Stichprobenfehler (m.Z.) für die durchschnittlichen Kopierausgaben bei einer einfachen Zufallstichprobe (Konfidenzniveau 95,45%).

Aus $(1-\alpha) = 0,9545$ folgt $z = 2$ (vgl. ÜA 9).

$$\bar{x} = \frac{5\,400}{200} = 27$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2 = \frac{1}{199} \cdot 165\,700 - \frac{200}{199} \cdot 27^2 = 100 \implies s = 10$$

$$\implies |\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{200}} = 1,4142$$

$$\implies \hat{e}_r \cdot 100 = \frac{|\hat{e}|}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{1,4142}{27} \cdot 100 = 5,24\%,$$

d.h.: Mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45% beträgt die zufällige Abweichung (nach oben bzw. unten) des Durchschnitts $\bar{x}$ der Stichprobe von dem wahren unbekannten Durchschnitt μ in der Grundgesamtheit 1,41 €. Dies entspricht einer prozentualen Abweichung von 5,24%.

Zusammenfassung:

Bsp.: einer Stichprobenplanung und -auswertung, homograder Fall

In der Fakultät Wirtschaft der DHBWs soll der Anteil der Studierenden mit „Mathenote 3“ geschätzt werden $N = 4\,000$.

1. Zulässiger Fehler $|e'| = 0,05$ und Sicherheitswahrscheinlichkeit $1-\alpha = 0,9545$ (d.h. $z = 2$)

2.a Pilotstudie: $\pi' = 0,388$

2.b „Ungünstige Schätzung: $\pi = 0,5$, $\sigma'^2 = 0,25$

3.a Notwendiger Stichprobenumfang: $n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\pi'(1-\pi')}{e'^2} = 4 \cdot \dfrac{0,388 \cdot 0,612}{0,0025} \approx 380$

3.b Notwendiger Stichprobenumfang: $n \geq 4 \cdot \dfrac{0,25}{0,0025} = 400$

4.+5.a Zufallsstichprobe (m.Z.) mit $n = 380 \longrightarrow$ Ergebnis: 152 der 380 Studierenden haben die Mathenote 3 $\implies p = \dfrac{152}{380} = 0,4 = \hat{\pi}$

4.+5.b Zufallsstichprobe (m.Z.) mit $n = 400 \longrightarrow$ Ergebnis: 160 der 400 Studierenden haben die Mathenote 3 $\Longrightarrow p = \frac{160}{400} = 0,4 = \hat{\pi}$

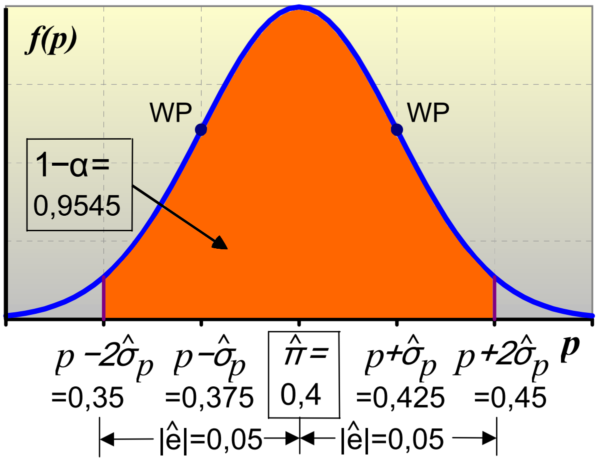
6.a Fehlerrechnung: $|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{379}} = 0,05$

6.b Fehlerrechnung: $|\hat{e}| = z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{399}} = 0,049$

7.a Konfidenzintervall für π: $[p - |\hat{e}|; p + |\hat{e}|] = [0,35; 0,45]$, für $N\pi$: $[1\,400; 1\,800]$

7.b Konfidenzintervall für π: $[0,351; 0,449]$, für $N\pi$: $[1\,404; 1\,796]$.

Grafische Darstellung für den Fall a):



Buch, Seite 162:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{379}} = 0,025$$

Bsp.: einer Stichprobenplanung und -auswertung, heterograder Fall

In der Fakultät Wirtschaft der DHBWs sollen die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien der $N = 4\,000$ Studierenden geschätzt werden.

1. Zulässiger Fehler 2%, also $e'_r = 0,02$, (bei $z = 2$)
2. Pilotstudie: $\mu' = 27,2$ und $\sigma' = 8$
3. Notwendiger Stichprobenumfang: Da $e'_r = \frac{|e'|}{\mu'} = \frac{|e'|}{27,2} = 0,02 \Longrightarrow |e'| = 0,544 \Longrightarrow$

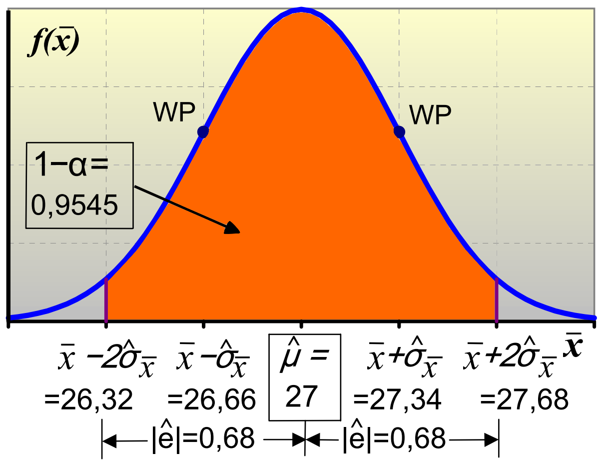
$$n \geq z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'^2}{e'^2} = 4 \cdot \frac{64}{0,544^2} \approx 866$$

4.+5. Zufallsstichprobe (m.Z.) mit $n = 866 \longrightarrow$ Ergebnis: $\bar{x} = 27 = \hat{\mu}$ und $s^2 = 100$

6. Fehlerrechnung: $|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{866}} = 0,68$ (die Streuung in der Stichprobe war kleiner)

7. Konfidenzintervall für μ: $[\bar{x} - |\hat{e}|; \bar{x} + |\hat{e}|] = [26,32; 27,68]$, für $N\mu$: $[105\,280; 110\,720]$

Grafische Darstellung:



Buch, Seite 162:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\bar{x}} &= \frac{s}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{866}} \\ &= 0,34\end{aligned}$$

Beachte: Das Ziel, ein Konfidenzintervall – d.h. ein Intervall um den Anteil π bzw. das arithmetische Mittel μ der Grundgesamtheit – zu bilden, besteht darin, bei einer späteren konkreten Stichprobe i mit dem Anteil p_i bzw. dem arithmetische Mittel $\bar{x}_i$ darauf vertrauen zu können, dass p_i bzw. $\bar{x}_i$ in diesem Intervall liegt. Wurde das Konfidenzintervall z.B. für einen Sicherheitsgrad von 95,45% aus einer Stichprobe geschätzt, so kann anschließend für eine konkrete Stichprobe i getestet werden, wie gut p_i bzw. $\bar{x}_i$ ist, d.h. wie nahe es bei dem wahren unbekannten π- bzw. μ-Wert liegt. Das Vertrauen kann hierbei enttäuscht werden, nämlich dann, wenn der unwahrscheinliche Fall auftritt, dass p_i bzw. $\bar{x}_i$ außerhalb des Intervalls liegt. Damit wird deutlich, dass $|e|$ nicht als maximaler Fehler interpretiert werden kann, sondern im Konfidenzintervall lediglich den zufälligen Abstand (die zufällige Abweichung) eines Stichprobenergebnisses zu (von) π bzw. μ nach oben bzw. unten angibt. Außerdem: Wäre $|e|$ die maximale Abweichung, so müsste bei einer konkreten Stichprobe i der Anteilswert p_i bzw. das arithmetische Mittel $\bar{x}_i$ genau auf einer Grenze des Konfidenzintervalls liegen, aber es ist wahrscheinlicher, dass p_i näher an π bzw. $\bar{x}_i$ näher an μ liegt als am Rand des Intervalls.

Bisher wurde der Fall des Schätzens betrachtet, d.h. ein Vertrauensintervall berechnet, das die Zuverlässigkeit einer Punktschätzung abbildet.[9] D.h.: Gegeben ist eine Zufallsstichprobe vom Umfang n mit einem Anteil p oder einem arithmetischen Mittel $\bar{x}$. Mit der Berechnung des Konfidenzintervalls[10] wird geschätzt, wie gut der Anteil p bzw. das arithmetische Mittel $\bar{x}$ als Schätzung für den unbekannten, wahren Anteil π bzw. das unbekannte, wahre arithmetische Mittel μ verwendet werden kann (Repräsentationsschluss, Buch, Seite 145).

Jetzt wird der Fall des Testens betrachtet, d.h. es wird geprüft, ob ein Stichprobenergebnis wahrscheinlich oder eher unwahrscheinlich ist. D.h. Gegeben ist eine Stichprobenverteilung, z.B. $n\pi \sim N[n\pi, n\pi(1-\pi)]$ mit bekanntem n und π. Bei einem Sicherheitsgrad von z.B. $(1-\alpha) = 0,9545$ wird geprüft, ob ein Ergebnis p einer Zufallsstichprobe vom Umfang n wahrscheinlich oder eher unwahrscheinlich ist (Buch, Seite 139, Inklusionsschluss: Annahmebereich, Seite 144).

[9] Vgl. Buch, Seite 143: Punktschätzung: $\bar{x}$ wird als Schätzwert für μ verwendet, p wird als Schätzwert für π verwendet $\longrightarrow$ Hochrechnung (s.o. Stichprobenplanung und -auswertung).

[10] vgl. Buch, Seite 143: Das Konfidenzinterval ist eine Intervallschätzung $\longrightarrow$ Fehlerrechnung (s.o. Stichprobenauswertung).

ÜA 21: Bsp. für das Testen eines Stichprobenergebnisses (Inklusionsschluss), FS, Seite 20

Es wird behauptet, dass 40% der Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs die Mathenote 3 haben. Wir überprüfen die Behauptung durch Zufallsstichproben vom Umfang $n = 100$ ($n = 400$) und erhalten jeweils $p = 0,35$. Ist die Behauptung bei einer Wahrscheinlichkeit von $(1-\alpha) = 0,9545$ haltbar?

gegeben: 1) $\pi = 0,4$: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 in der Grundgesamtheit

2) ZV P: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 einer Zufallsstichprobe (m.Z.) mit Umfang $n = 100$ ($n = 400$) und dem Ergebnis $p = 0,35$

3) $(1-\alpha) = 0,9545$, d.h. $z = 2$

Überprüfung: Liegt $p = 0,35$ im Intervall (Annahmebereich, wahrscheinlicher Bereich):

$$\left[\pi - z \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}, \pi + z \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right] \quad ?$$

$$P\left(\pi - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \leq P \leq \pi + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1-\alpha \quad \Longrightarrow$$

a) $n = 100 \Longrightarrow$ Annahmebereich:

$$0,4 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} \leq P \leq 0,4 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} \quad \Longrightarrow$$

$$0,302 \leq P \leq 0,498.$$

Ja! $p = 0,35$ liegt im Annahmebereich, d.h.: Aufgrund der Stichprobe kann man die Behauptung H_0: „Der Anteil der Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs mit Mathenote 3 beträgt 40%“ nicht widerlegen. (Bei Ablehnung von H_0 würde man mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer ist als 4,55%, einen Fehler begehen.)

b) $n = 400 \Longrightarrow$ Annahmebereich:

$$0,4 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{400}} \leq P \leq 0,4 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{400}} \quad \Longrightarrow$$

$$0,351 \leq P \leq 0,449.$$

Nein! $p = 0,35$ liegt *nicht* im Annahmebereich, d.h.: Aufgrund der Stichprobe kann man *nicht* behaupten H_0: „Der Anteil der Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs mit Mathenote 3 beträgt 40%“. (Bei *Ablehnung* von H_0 begeht man mit einer maximalen Wahrscheinlichkeit von 4,55% einen Fehler.)

Mit dem Hypothesentest (vgl. Kapitel 5.3) hätte man die Behauptung gemäß FS, Seite 26, in 5 Schritten überprüft, vgl. FS, Seite 27, Test 1. Siehe ÜA 27.

ÜA 22: Bsp. für das Testen eines Stichprobenergebnisses (Inklusionsschluss), FS, Seite 20, Buch, Seite 139, (Vergleichbare Übungsaufgabe 14a, FS, Seite 20, Buch, Seite 141/142)

Es wird behauptet, Studierende der Fakultät Wirtschaft der DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27 € für Kopien aus bei einer Standardabweichung von 10 €. Wir überprüfen die Behauptung durch Zufallsstichproben vom Umfang $n = 100$ ($n = 500$) und erhalten jeweils $\bar{x} = 28$. Ist die Behauptung bei einer Wahrscheinlichkeit von $(1-\alpha) = 0,9545$ haltbar?

gegeben: 1) $\mu = 27$, $\sigma = 10$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien und Varianz der Ausgaben für Kopien in der Grundgesamtheit

2) ZV $\overline{X}$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien einer einfachen Zufallsstichprobe mit Umfang $n = 100$ ($n = 500$) und dem Ergebnis $\bar{x} = 28$

3) $(1-\alpha) = 0,9545$, d.h. $z = 2$

Überprüfung: Liegt $\bar{x} = 28$ im Intervall (Annahmebereich, wahrscheinlicher Bereich):

$$\left[\mu - z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad ?$$

$$P\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

a) $n = 100 \implies$ Annahmebereich:

$$27 - 2\cdot\frac{10}{\sqrt{100}} \leq \overline{X} \leq 27 + 2\cdot\frac{10}{\sqrt{100}} \implies$$

$$25 \leq \overline{X} \leq 29.$$

Ja! $\bar{x} = 28$ liegt im Annahmebereich, d.h.: Behauptung ist haltbar. d.h.: Aufgrund der Stichprobe kann man die Behauptung H_0: „Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27 € für Kopien aus“ *nicht* widerlegen. (Bei Ablehnung von H_0 würde man mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer ist als 4,55%, einen Fehler begehen.)

b) $n = 500 \implies$ Annahmebereich:

$$27 - 2\cdot\frac{10}{\sqrt{500}} \leq \overline{X} \leq 27 + 2\cdot\frac{10}{\sqrt{500}} \implies$$

$$26,11 \leq \overline{X} \leq 27,89.$$

Nein! $\bar{x} = 28$ liegt *nicht* im Annahmebereich, d.h.: Behauptung H_0: „Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27 € für Kopien aus“ ist *nicht* haltbar. (Bei *Ablehnung* von H_0 begeht man mit einer maximalen Wahrscheinlichkeit von 4,55% einen Fehler.)

Mit dem Hypothesentest (vgl. Kapitel 5.3) hätte man die Behauptung gemäß FS, Seite 26, in 5 Schritten überprüft, vgl. FS, Seite 27, Test 1. Siehe ÜA 28.

5.2.2 Zufallsstichprobenplanung und -auswertung bei geschichteter Zufallsauswahl

Bisher wurden bei der Stichprobenplanung und -auswertung immer einfache Zufallsstichproben (simple random sampling) betrachtet (FS, Seite 21). Jetzt wird – um den Stichprobenumfang zu reduzieren – eine Schichtung der Zufallsstichprobe (FS, Seite 22) vorgenommen (stratified sampling), wodurch die Stichprobenvarianz (und damit der Stichprobenumfang) verringert wird.[11] Die Stichprobe wird in bzgl. des Schätzwertes möglichst homogene Teilmengen (Schichten) zerlegt (vgl. Buch, Seite 158). Die Zahl der Schichten, ihre Umfänge und die Schichtgrenzen seien (wie in der Praxis oft der Fall) vorgegeben.

- **Notation:**

  $$\left.\begin{array}{l}\text{Anzahl der Schichten: } L \\ \text{Index einer Schicht: } h\end{array}\right\} \Longrightarrow N = \sum_{h=1}^{L} N_h, \quad n = \sum_{h=1}^{L} n_h,$$

  d.h.: Summiert man alle Einheiten aller L Schichten der Grundgesamtheit, so erhält man die Anzahl N der Elemente in der Grundgesamtheit, Summiert man alle Einheiten aller L Schichten einer Stichprobe, so erhält man die Anzahl n der Elemente in der Stichprobe.

- Für das **arithmetische Mittel der Grundgesamtheit** bzw. den **Erwartungswert** der ZV $\overline{X}$ gilt (vgl. Buch, Seite 158):

  $$\mu = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h \mu_h = E(\overline{X}).$$

- Für die **Varianz** der ZV $\overline{X}$ gilt (vgl. Buch, Seite 158):

  $$Var(\overline{X}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \cdot \frac{\sigma_h^2}{n_h} = \sigma_{\overline{x}}^2.$$

Zerlegungsmöglichkeiten für eine Stichprobe (vgl. Buch, Seite 158/159):

- **gleichmäßig:** $n_h = \frac{n}{L}$, d.h.: Jede Schicht ist gleich groß.
- **optimal:** $n_h = \frac{N_h \sigma_h}{\sum N_h \sigma_h} \cdot n$, d.h.: Aus Schichten mit höherer Streuung und höherem Umfang werden größere Stichproben gezogen.
- **proportional:** $n_h = \frac{N_h}{N} \cdot n$.

[11] Es gibt 3 Möglichkeiten, den Stichprobenumfang zu verkleinern, vgl. Formel $n \geq z^2 \frac{\sigma'^2}{e'^2}$:

1. durch Schichtung, da dann σ'^2 kleiner wird,
2. durch Vergrößerung von e', also der Forderung einer geringeren Genauigkeit,
3. durch Verkleinerung des σ-Bereichs, also in Kauf nehmen einer größeren Unsicherheit bei der Aussage, da größere Irrtumswahrscheinlichkeit α.

Wir betrachten beispielhaft die proportionale Aufteilung (FS, Seite 22). Dabei nehmen wir an, dass es keine Schichtspringer gibt (falls doch $\longrightarrow$ systematischer Fehler); dies wäre dann der Fall, wenn es Einheiten gibt, die zwischen Planung und Erhebung die Schicht wechseln, d.h. N_h wäre nicht stabil.

Auflösen der Formel für die proportionalen Aufteilung nach N_h und Einsetzen in die Formel der Varianz der ZV $\overline{X}$ ergibt:

- Varianz der ZV $\overline{X}$ bei proportionale Aufteilung[12]

$$Var(\overline{X}) = \sigma_{\overline{x}}'^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \sigma_h'^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{L} n_h \sigma_h'^2 = \frac{1}{n} \cdot \sigma_{\text{int}}'^2.$$

Berücksichtigt man die Formel für die Varianz in der Formel des Zufallsfehlers einer Zufallsstichprobe $|e'| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{x}}'$ (vgl. Seite 33), so folgt:

- Zufallsfehler bei proportionale Aufteilung (FS, Seite 22)

$$|e'| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} \sigma_h'^2} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sigma_{\text{int}}'^2}$$

- notwendiger Stichprobenumfang für vorgegebene Genauigkeit $|e'|$ bei proportionale Aufteilung

$$n \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\sum N_h \sigma_h'^2}{N e'^2} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\sigma_{\text{int}}'^2}{e'^2}.$$

ÜA 23: Bsp. für die Stichprobenplanung bei Schichtung

Aus einer früheren Erhebung zu den Ausgaben für Kopien pro Semester bei Studierenden an DHBWs hat man folgende Daten als Auswahlgrundlage (N_h stabil, keine Schichtspringer):

Schicht Nr.	Anzahl der Studierenden (Tsd.)	Gesamtausgaben für Kopien je Schicht (Tsd. €)	Summe der quadrierten Einzelausgaben je Schicht (Tsd. €^{2})
1	4	88	2 000
2	3	96	3 096
3	1	32	1 536

Eine neue Zufallsstichprobe ist geplant. Berechnen Sie den notwendigen Stichprobenumfang für die durchschnittlichen Kopierausgaben bei einfacher und proportional geschichteter Zufallsauswahl (m.Z.), wenn der Stichprobenfehler bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45% nicht höher als 2% sein soll.

[12] Da $\overline{X}$ und nicht X betrachtet wird, wird die interne Varianz bestimmt. Bei der Varianz von X müsste die Summe aus interner und externer Varianz bestimmt werden.

h	N_h (Tsd.)	$\sum_{i=1}^{N_h} x_{ih}$ (Tsd.)	$\sum_{i=1}^{N_h} x_{ih}^2$ (Tsd.)	μ_h'	$\sigma_h'^2$	$N_h\sigma_h'^2$ (Tsd.)
1	4	88	2 000	22*	16**	64
2	3	96	3 096	32	8	24
3	1	32	1 536	32	512	512
$\sum$	8	216	6 632	–	–	600

$$* \quad \mu_h' = \frac{\sum_i x_{ih}}{N_h} \Longrightarrow \mu_1' = \frac{88}{4} = 22 \qquad ** \quad \sigma_h'^2 = \frac{\sum_i x_{ih}^2}{N_h} - \mu_h'^2 \Longrightarrow \sigma_1'^2 = \frac{2\,000}{4} - 22^2 = 16$$

$$\Longrightarrow \mu' = \frac{216}{8} = 27$$

$$e_r' = \frac{|e'|}{\mu'} = \frac{2}{100} \quad \Longrightarrow \quad |e'| = \frac{2}{100} \cdot 27 = 0,54$$

1) Stichprobe bei einfacher Zufallsauswahl (m.Z.):

$$\sigma'^2 = \frac{6\,632}{8} - 27^2 = 100$$

$$n \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\sigma'^2}{e'^2} = 4 \cdot \frac{100}{0,54^2} \approx 1\,372.$$

2) Stichprobe bei proportional geschichteter Zufallsauswahl (m.Z.):

$$n \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\sum N_h \sigma_h'^2}{N e'^2} = 4 \cdot \frac{600}{8 \cdot 0,54^2} \approx 1\,029 \quad \Longrightarrow$$

bei proportionale Schichtung:

1. Schicht: $n_1 = \frac{N_1}{N} \cdot n = \frac{4\,000}{8\,000} \cdot 1\,029 \approx 515$

2. Schicht: $n_2 = \frac{N_2}{N} \cdot n = \frac{3\,000}{8\,000} \cdot 1\,029 \approx 386$

3. Schicht: $n_3 = \frac{N_3}{N} \cdot n = \frac{1\,000}{8\,000} \cdot 1\,029 \approx 129.$

Nach der Zufallsauswahl (gemäß dem ermittelten notwendigen Stichprobenumfang) – dies ist Punkt 5 der Stichprobenplanung und -auswertung – wird je Schicht $\bar{x}_h$ und s_h^2 berechnet, aber *nicht* je Schicht die Genauigkeit berechnet, denn sonst hätte je Schicht ein notwendiger Stichprobenumfang berechnet werden müssen (vgl. Buch, Seite 159). Dann können nach den Formeln der FS, Seite 22 (Buch, Seite 159/160) eine Hochrechnung (Punkt 6) und Fehlerrechnung (Punkt 7) vorgenommen und ein Konfidenzintervall (Punkt 8) bestimmt werden:

- **Hochrechnung:** Schätzung des arithmetischen Mittels μ (FS, Seite 22)

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h$$

- **Fehlerrechnung:**

$$|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}s_h^2} \quad \text{mit} \quad s_h^2 = \frac{1}{n_h-1}\sum_{i=1}^{n_h}(x_{ih}-\bar{x}_h)^2 \quad \text{bzw.} \quad s_h^2 = \frac{1}{n_h-1}\sum_{i=1}^{n_h}x_{ih}^2 - \frac{n_h}{n_h-1}\cdot\bar{x}_h^2$$

- **Konfidenzintervalle:**

$$\bar{x} - |\hat{e}| \le \mu \le \bar{x} + |\hat{e}|$$

$$N\cdot\bar{x} - N\cdot|\hat{e}| \le N\cdot\mu \le N\cdot\bar{x} + N\cdot|\hat{e}|$$

ÜA 24: Bsp. für die Stichprobenauswertung bei Schichtung *(Fortsetzung der ÜA 23)*

Aus einer Zufallsauswahl zu den Ausgaben für Kopien pro Semester bei Studierenden an DHBWs hat man folgendes Ergebnis:

Schicht Nr.	Anzahl der Studierenden	Gesamtausgaben für Kopien je Schicht (€)	Summe der quadrierten Einzelausgaben je Schicht (€^{2})
1	515	11 443	262 533
2	386	12 432	403 597
3	129	4 141	199 835

Schätzen Sie die durchschnittlichen Kopierausgaben eines Studierenden pro Semester, den absoluten und prozentualen Zufallsfehler und das Konfidenzintervall bei einfacher und proportional geschichteter Zufallsauswahl (m.Z.) und einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45%.

h	N_h (Tsd.)	$\sum_{i=1}^{n_h} x_{ih}$	$\sum_{i=1}^{n_h} x_{ih}^2$	n_h	$\bar{x}_h$	$N_h\bar{x}_h$ (Tsd.)	s_h^2	$\frac{N_h}{N}s_h^2$
1	4	11 443	262 533	515	22,22*	88,88	16,1**	8,05
2	3	12 432	403 597	386	32,21	96,62	8,3	3,11
3	1	4 141	199 835	129	32,10	32,10	522,7	65,34
$\sum$	8	28 016	865 965	1 030	–	217,6	–	76,5

$$* \quad \bar{x}_h = \frac{\sum_i x_{ih}}{n_h} \implies \bar{x}_1 = \frac{11\,443}{515} = 22,22$$

$$** \quad s_h^2 = \frac{\sum_i x_{ih}^2}{n_h-1} - \frac{n_h}{n_h-1}\bar{x}_h^2 \implies s_1^2 = \frac{262\,533}{514} - \frac{515}{514}\cdot 22,22^2 = 16,1$$

1) Stichprobe bei einfacher Zufallsauswahl (m.Z.):

$$\bar{x} = \frac{28\,016}{1\,030} = 27,2, \qquad s^2 = \frac{865\,965}{1029} - \frac{1\,030}{1\,029}\cdot 27,2^2 = 101 \implies$$

$$|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{101}{1\,030}} = 0,626 \implies \hat{e}_r = \frac{|\hat{e}|}{\bar{x}} = \frac{0,626}{27,2} = 0,023,$$

d.h.: Mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45% beträgt die zufällige Abweichung (nach oben bzw. unten) der durchschnittlichen Kopierausgaben $\bar{x}$ der Stichprobe von den wahren unbekannten durchschnittlichen Kopierausgaben μ der Grundgesamtheit 0,626 €, dies entspricht einer prozentualen Abweichung von 2,3%. (Da $n = 1\,030 < 1\,327$, ist der Stichprobenfehler größer als 2 %, vgl. ÜA 23.)

Konfidenzintervall für μ:

$$\bar{x} - |\hat{e}| \leq \mu \leq \bar{x} + |\hat{e}| \implies$$

$$27,2 - 0,626 \leq \mu \leq 27,2 + 0,626 \implies$$

$$26,57 \leq \mu \leq 27,83.$$

Konfidenzintervall für $N \cdot \mu$:

$$N \cdot \bar{x} - N \cdot |\hat{e}| \leq N \cdot \mu \leq N \cdot \bar{x} + N \cdot |\hat{e}| \implies$$

$$8\,000 \cdot 27,2 - 8\,000 \cdot 0,626 \leq N \cdot \mu \leq 8\,000 \cdot 27,2 + 8\,000 \cdot 0,626 \implies$$

$$212\,592 \leq N \cdot \mu \leq 222\,608.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45% liegen die pro-Kopf-Ausgaben für Kopien im Intervall [26,57 €; 27,83 €] bzw. die Gesamtausgaben aller 8 000 Studierenden im Intervall [12 592 €;222 608 €].

2) Stichprobe bei proportional geschichteter Zufallsauswahl (m.Z.):

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{217,6}{8} = 27,2,$$

$$|\hat{e}| = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} s_h^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{76,5}{1\,030}} = 0,545 \implies e_r = \frac{|\hat{e}|}{\bar{x}} = \frac{0,545}{27,2} = 0,02, \text{ also } 2\%.$$

Konfidenzintervall für μ:

$$\bar{x} - |\hat{e}| \leq \mu \leq \bar{x} + |\hat{e}| \implies$$

$$27,2 - 0,545 \leq \mu \leq 27,2 + 0,545 \implies$$

$$26,65 \leq \mu \leq 27,75.$$

Konfidenzintervall für $N \cdot \mu$:

$$N \cdot \bar{x} - N \cdot |\hat{e}| \leq N \cdot \mu \leq N \cdot \bar{x} + N \cdot |\hat{e}| \implies$$

$$8\,000 \cdot 27,2 - 8\,000 \cdot 0,545 \leq N \cdot \mu \leq 8\,000 \cdot 27,2 + 8\,000 \cdot 0,545 \implies$$

$$213\,240 \leq N \cdot \mu \leq 221\,960.$$

5.3 Testverfahren

Bei der Erklärung eines Hypothesentests wird der Spezialfall eines Einstichprobentests betrachtet. Ziel eines solchen Hypothesentests ist es, eine Nullhypothese H_0 aufgrund des Ergebnisses *einer* Stichprobe (sog. Einstichprobentest) ablehnen und damit die Gegenhypothese H_1 annehmen zu können und dabei mit einer maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit von z.B. 5% (d.h. $\alpha = 0{,}05$) einen Fehler zu begehen. Beispielhaft werden in den Übungsaufgaben ÜA 25 bis ÜA 28 die Einstichprobentests für den Anteilswert und das arithmetische Mittel, sog. Parametertests, vorgestellt, d.h. die Hypothese bezieht sich auf die numerischen Werte des Parameters π oder μ der Grundgesamtheit. „Kann eine Stichprobe bzgl. des betrachteten Parameters π oder μ aus einer vorgegebenen Grundgesamtheit stammen?“ In den ÜA 29 und ÜA 30 werden Zweistichprobentests für Anteilswerte bzw. arithmetische Mittel durchgeführt. „Unterscheiden sich zwei Stichproben bzgl. des Anteilswertes oder des arithmetischen Mittels?“

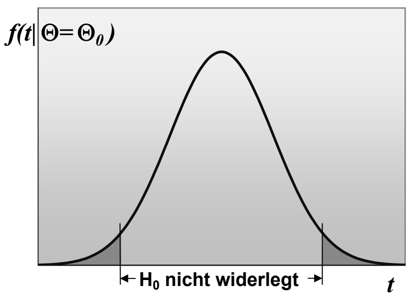
In der Vorlesung „Multivariate statistische Verfahren“ werden Zwei- oder Mehrstichprobentests angewandt, z.B. bei der Varianzanalyse, bei der die Nullhypothese H_0: „arithmetische Mittel der 2 oder mehr Stichproben sind gleich“ als wahrscheinlich oder eher unwahrscheinlich überprüft wird, mit dem Ziel, H_0 ablehnen zu können – „Können zwei oder mehr Stichproben bzgl. des betrachteten Parameters μ aus derselben Grundgesamtheit stammen?“ –, während bei der Überprüfung der Nullhypothese H_0: „Varianzen der zwei oder mehr Stichproben sind gleich“ das Ziel darin besteht, H_0 nicht ablehnen zu können.

Die sog. Nullhypothese H_0 ist die mathematische Formulierung einer aus der Theorie oder Erfahrung oder … sich ergebende Hypothese, so dass eine Überprüfung durch einen Hypothesentest (Signifikanztest) möglich ist. Dazu gehören eine Testfunktion T als Zufallsvariable, d.h. eine statistische Kenngröße, die empirisch erfasst werden kann, so dass bei bekannten Zufallsprozessen [z.B. Ziehung einer Stichprobe im Umfang n (m.Z.)] eine Verteilung möglicher Ergebnisse angegeben werden kann. Dann lassen sich Regeln ableiten, nach denen mögliche Stichprobenergebnisse mit einer Hypothese vereinbar oder nicht vereinbar sind. Liegt ein Stichprobenergebnis am Rand einer Verteilung, für die H_0 gilt, so ist es ein unwahrscheinliches Resultat und daher ist H_0 widerlegt.

Um eine **Testverteilung** $f(t|\Theta = \Theta_0)$ (z.B. $f(t|\mu = \mu_0)$) [für mögliche Ergebnisse $\Theta = \Theta_0$ einer Stichprobe] angeben zu können, muss der zu untersuchende Parameter Θ als *ein* Wert festgelegt werden ($\Theta = \Theta_0$). Würde man $\Theta \leq \Theta_0$ annehmen, hätte man eine unendliche Anzahl möglicher Testverteilungen. Dann kann mit einer solchen Verteilung eine Punkt- oder Bereichshypothese überprüft werden (Buch, Seite 166):

- **Punkthypothese:** H_0**:** $\Theta = \Theta_0$

  Zweiseitiger Hypothesentest

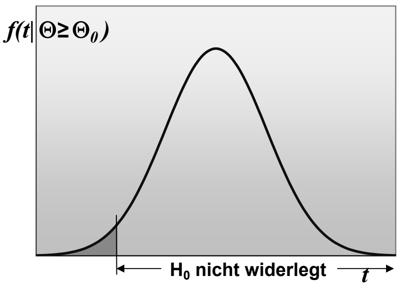


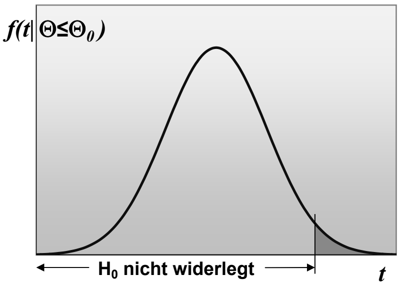
dann würden alle zu großen und zu kleinen Realisationen t der Nullhypothese widersprechen

- **Bereichshypothese:**

Einseitiger Hypothesentest

H_0: $\Theta \geq \Theta_0$ H_0: $\Theta \leq \Theta_0$

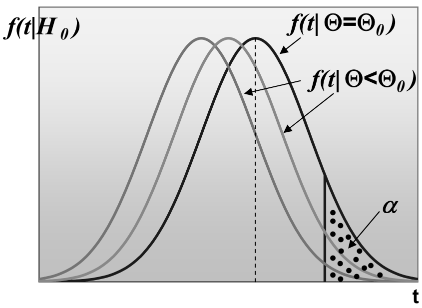




dann würden alle zu kleinen bzw. zu großen Realisationen t der Nullhypothese widersprechen.

Die Logik der Bereichshypothesen besagt, dass die Testverteilung für $\Theta = \Theta_0$ abgeleitet wird und für alle $\Theta < \Theta_0$ bzw. $\Theta > \Theta_0$ dann gilt, dass die Irrtumswahrscheinlichkeiten kleiner sind als bei H_0: $\Theta = \Theta_0$:

Irrtumswahrscheinlichkeiten für H_0: $\Theta \leq \Theta_0$

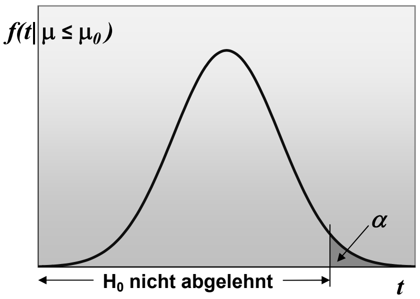


Die Nullhypothese wird also mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens α abgelehnt.

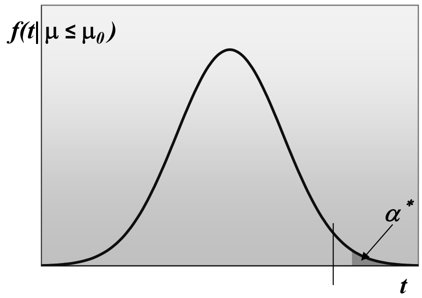
Diese Argumentation gilt genauso für eventuelle Gegenhypothesen H_1. Ohne eine – sachlich sinnvolle – Konkretisierung H_1: $\Theta = \Theta_1$ hat man allerdings keine Testverteilung, aus der Irrtumswahrscheinlichkeiten berechenbar sind.

Um also eine Testverteilung zu erhalten, muss die Hypothese als ein numerischer Wert formuliert werden und heißt dann (zunächst ohne Betrachtung einer spezifizierbaren Gegenhypothese) Nullhypothese H_0, z.B. H_0: $\mu \leq \mu_0$ oder H_0: $\mu = \mu_0$. Danach wird je nach Testfunktion eine Testverteilung abgeleitet, mit der Vorgabe einer tolerierbaren Irtumswahrscheinlichkeit ein Ablehnungsbereich berechnet, die Stichprobe gezogen und der realisierte Wert für die Testfunktion berechnet. Fällt dieser Wert in den vorgegebenen „Annahmebereich“, so darf die Hypothese vorläufig aufrechterhalten werden – sie ist aber nicht bestätigt! –, fällt sie als „unwahrscheinliches“ Ergebnis in den Ablehnungsbereich, so ist die Hypothese widerlegt. Je unwahrscheinlicher das Ergebnis (bei diesem Verfahren) wäre, desto stärker ist die Widerlegung bzw. desto höher ist die Signifikanz. Da diese Information aber bei vorgegebenem α und der einfachen Entscheidung für und wider H_0 nicht mehr zur Verfügung steht, wird manchmal vorgeschlagen („purer Signifikanztest“), nach der Stichprobenziehung das α^* anzugeben, bei dem H_0 gerade noch nicht verworfen wird. Je kleiner α^* ausfällt, desto stärker sei dann die Widerlegung bzw. desto höher die Signifikanz.

Klassischer und purer Signifikanztest (H_0: $\mu \leq \mu_0$)



H_0 abgelehnt bei $\alpha = 0{,}05$



H_0 abgelehnt bei $\alpha^* < \alpha = 0{,}05$

Der **Hypothesentest (Signifikanztest)** erfolgt in 5 Schritten (Buch, Seite 168/169, FS, Seite 26):

1. Formulierung der Nullhypothese H_0 (und Gegenhypothese (Alternativhypothese) H_1)

2. Wahl einer geeigneten Testfunktion (Prüfgröße) und Bestimmung der Test*verteilung* bei Gültigkeit der Nullhypothese

3. Festlegen des Signifikanzniveaus α und Bestimmen des Ablehnungsbereichs – bzw. alternativ in Schritt 4: Bestimmen des Signifikanzniveaus α^* im puren Signifikanztest

4. Stichprobenziehung und Berechnung des Wertes der Testfunktion für die Stichprobe

5. Entscheidung und Interpretation

ÜA 25: Bsp. für einen Einstichprobentest für den Anteilssatz (vgl. Test 1, Buch, Seite 184, FS, Seite 26/27)

40% der Studierenden an DHBWs haben die Mathenote 3. Eine Stichprobe von 200 Studierenden der Fakultät Wirtschaft ergab 90 Studierende mit der Mathenote 3. Prüfen Sie anhand eines Hypothesentests in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}0455$ die Hypothese: Unter den Studierenden der Fakultät Wirtschaft gibt es mehr Studierende mit Mathenote 3 als in anderen Fakultäten. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis grafisch für die Stichprobenverteilung $f(p\,|\,H_0)$.

1. Nullhypothese (Ziel H_0 ablehnen!) und Gegenhypothese (vgl. Buch, Seite 170: Die zu überprüfende Hypothese soll als Gegenhypothese formuliert werden.)

   H_0: $\pi \leq \pi_0 = 0{,}4$ (vgl. FS, Seite 24 rechte Grafik)

   H_1: $\pi > \pi_0 = 0{,}4$

   wobei π_0: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der DHBWs

   π: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der Fakultät Wirtschaft der DHBWs

2. Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

3. Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) und Ablehnungsbereich (Test 1 FS, Seite 27)

$$\alpha = 0,0455 \implies z_{1-0,0455} = 1,69 \implies \text{Ablehnungsbereich: } t > 1,69$$

4. Stichprobenziehung: $n = 200$ mit $p = 0,45$ (da 90 von 200 Mathenote 3) und Wert der Testfunktion:

$$t = \frac{0,45 - 0,4}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}}\sqrt{200} = 1,443$$

5. Entscheidung und Interpretation

Da $t = 1,443 < 1,69$ ist, kann H_0 nicht abgelehnt werden. D.h. Bei diesem Stichprobenumfang und dem vorgegebenen Signifikanzniveau kann die Hypothese, dass es unter den Studierenden der Fakultät Wirtschaft gleichviel oder weniger Studierende mit Mathenote 3 gibt als in anderen Fakultäten, *nicht* widerlegt werden.

Grafische Darstellung: (vgl. FS, Seite 24, rechte Grafik)

$$P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

kann durch Einsetzen von $Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n}$ für die ZV P: Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 einer einfachen Zufallsstichprobe umgeformt werden zu

$$P\left(P \leq \pi_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Für $\alpha = 0,0455$ mit dem kritischen Wert $z_{1-\alpha} = 1,69$ ergibt sich der kritische Wert p_c

$$p_c = \pi_0 + 1,69 \cdot \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = 0,4 + 1,69 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{200}} = 0,4585.$$

Dieser Wert kann genausogut aus der Formel

$$t = 1,69 = \frac{p_c - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n} = \frac{p_c - 0,4}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}}\sqrt{200}$$

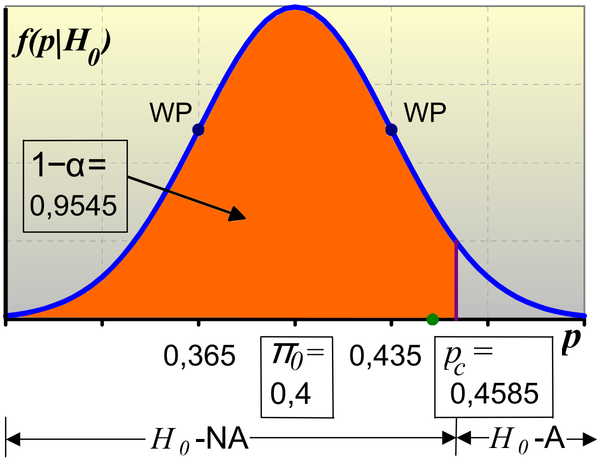
durch Auflösen nach p_c bestimmt werden.

Bem.: Vgl. Formelsammlung, Seite 26: Der kritische Wert wird für H_0: $\pi = \pi_0$ bestimmt, so dass für jedes $\pi < \pi_0$ das zugehörige α kleiner ist als bei H_0: $\pi = \pi_0$.

Erläuterungen zur Grafik:

H_0-NA ist der H_0-Nicht-Ablehnungsbereich, d.h.: Fällt ein Stichprobenergebnis in diesen Bereich, so ist es sehr wahrscheinlich, dass die Hypothese $H_0: \pi \leq \pi_0$ gilt.

H_0-A ist der H_0-Ablehnungsbereich, d.h. Fällt ein Stichprobenergebnis in diesen Bereich, so ist es sehr *un*wahrscheinlich, dass die Hypothese $H_0: \pi \leq \pi_0$ gilt.



Die Wendepunkte liegen in $0,4 \pm \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{200}}$, d.h. in 0,365 und 0,435.

Der eingezeichnete Punkt auf der p-Achse stellt den Stichprobenwert $p_{\text{emp}} = 0,45$ dar. Da er in den H_0-Nicht-Ablehnungsbereich fällt, kann $H_0 : \pi \leq \pi_0$ aufgrund der Stichprobe *nicht* abgelehnt werden.

Für $n = 400$ und gleichem Anteil $p = 0,45$ (d.h. 180 Studierende mit Mathenote 3) wäre $t = 2,04 > 1,69 = z_{1-0,0455}$, womit H_0 abgelehnt werden könnte. Bei Ablehnung von H_0, d.h. mit der Aussage H_1: „Unter den Studierenden der Fakultät Wirtschaft gibt es mehr Studierende mit Mathenote 3 als in anderen Fakultäten“ würde man mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 4,55% einen Fehler begehen. Beachte: Hinweis zur Interpretation (FS, Seite 24 und Buch, Seite 170): Bei genügend großen Stichproben erreicht man praktisch immer Signifikanz.

Für $n = 200$, d.h. $t = 1,443$ und $\alpha = 0,0764$, d.h. $z_{1-0,0764} = 1,430$, könnte H_0 abgelehnt werden und man würde bei Ablehnung von H_0, d.h. mit der Aussage H_1: „Unter den Studierenden der Fakultät Wirtschaft gibt es mehr Studierende mit Mathenote 3 als in anderen Fakultäten“ mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 7,64% einen Fehler begehen. Vgl. Buch, Seite 170: Mit großen Irrtumswahrscheinlichkeiten kann man leichter widerlegen (Signifikantes lässt sich leichter publizieren!).

ÜA 26: Bsp. für einen Einstichprobentest für das arithmetische Mittel (vgl. Test 1, Buch, Seite 184, FS, Seite 26/27)

Studierende an DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27 € für Kopien aus bei einer Streuung von $\sigma = 10$ €. Eine Stichprobe von 400 Studierenden der Fakultät Technik ergab durchschnittliche Kopierausgaben von $\bar{x} = 26$ €. Prüfen Sie anhand eines Hypothesentests in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$ die Hypothese: Studierende der Fakultät Technik geben im Durchschnitt pro Semester weniger für Kopien aus als Studierende anderer Fakultäten. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis grafisch für die Stichprobenverteilung $f(\bar{x}|H_0)$.

1. Nullhypothese (Ziel H_0 ablehnen!) und Gegenhypothese

   H_0: $\mu \geq \mu_0 = 27$ (vgl. FS, Seite 24, linke Grafik)

   H_1: $\mu < \mu_0 = 27$

2. Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

3. Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) und Ablehnungsbereich (Test 1 FS, Seite 27)

   $\alpha = 0{,}0455 \quad \Longrightarrow \quad z_{1-0{,}0455} = 1{,}69 \quad \Longrightarrow \quad$ Ablehnungsbereich: $t < -1{,}69$

4. Stichprobenziehung: $n = 400$ mit $\bar{x} = 26$ und Wert der Testfunktion:

   $$t = \frac{26-27}{10}\sqrt{400} = -2$$

5. Entscheidung und Interpretation

   Da $t = -2 < -1{,}69$ ist, kann H_0 abgelehnt werden (anders ausgedrückt: H_0 ist widerlegt). Aufgrund dieses Stichprobenergebnisses kann man mit einer maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit von 4,55% behaupten, dass Studierende der Fakultät Technik im Durchschnitt pro Semester weniger für Kopien ausgeben als Studierende anderer Fakultäten.

   Grafische Darstellung: (vgl. FS, Seite 24, linke Grafik)

   $$P(Z \geq z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$$

   kann durch Einsetzen von $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ für die ZV $\bar{X}$: durchschnittliche Ausgaben für Kopien einer einfachen Zufallsstichprobe umgeformt werden zu

   $$P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

   Für $\alpha = 0{,}0455$ mit dem kritischen Wert $z_{1-\alpha} = -1{,}69$ ergibt sich der kritische Wert $\bar{x}_c$

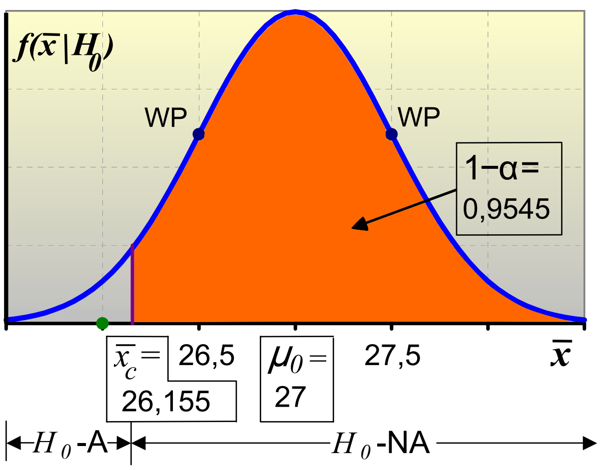
   $$\bar{x}_c = \mu_0 - 1{,}69 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 27 - 1{,}69 \cdot \frac{10}{\sqrt{400}} = 26{,}155.$$

   Dieser Wert kann genausogut aus der Formel

   $$t = -1{,}69 = \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\bar{x}_c - 27}{10}\sqrt{400}$$

   durch Auflösen nach $\bar{x}_c$ bestimmt werden.

   Bem.: Vgl. Formelsammlung, Seite 26: Der kritische Wert wird für H_0: $\mu = \mu_0$ bestimmt, so dass für jedes $\mu > \mu_0$ das zugehörige α kleiner ist als bei H_0: $\mu = \mu_0$.



Die Wendepunkte liegen in $27 \pm \frac{10}{\sqrt{400}}$, d.h. in $26{,}5$ und $27{,}5$.
Der eingezeichnete grüne Punkt auf der $\bar{x}$-Achse stellt den Stichprobenwert $\bar{x}_{\text{emp}} = 26$ dar. Da er in den H_0-Ablehnungsbereich fällt, kann $H_0: \mu \geq \mu_0$ aufgrund der Stichprobe abgelehnt werden.

H_0-A ist der H_0-Ablehnungsbereich, d.h.: Fällt ein Stichprobenergebnis in diesen Bereich, so ist es sehr *un*wahrscheinlich, dass die Hypothese $H_0: \ \mu \geq \mu_0$ gilt.

H_0-NA ist der H_0-Nicht-Ablehnungsbereich, d.h.: Fällt ein Stichprobenergebnis in diesen Bereich, so ist es sehr wahrscheinlich, dass die Hypothese $H_0: \ \mu \geq \mu_0$ gilt.

Für $n = 200$ könnte H_0 *nicht* widerlegt werden, da $t = -1,4142 > -1,69 = -z_{1-0,0455}$.

ÜA 27: Bsp. für einen Einstichprobentest für den Anteilssatz (vgl. Test 1, Buch, Seite 184, FS, Seite 27)

Überprüfen Sie die Behauptung der ÜA 21: „40% der Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs haben die Mathenote 3“ mit einem Hypothesentest in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$ durch die Zufallsstichprobe im Umfang $n = 100$ mit dem Ergebnis $p = 0,35$.

1. Nullhypothese und Gegenhypothese (Bei dieser Aufgabenstellung ist das Ziel, H_0 nicht ablehnen zu können!)

   H_0: $\pi = \pi_0 = 0,4$ (vgl. FS, Seite 24 mittlere Grafik)

   H_1: $\pi \neq \pi_0 = 0,4$

2. Testfunktion und Testverteilung

   $$T = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

3. Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) und Ablehnungsbereich (Test 1 FS, Seite 27)

   $\alpha = 0,0455 \implies z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,97725} = 2 \implies$ Ablehnungsbereich: $|t| > 2$

4. Stichprobenziehung: $n = 100$ mit $p = 0,35$ und Wert der Testfunktion:

   $$t = \frac{0,35 - 0,4}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}}\sqrt{100} = -1,021$$

5. Entscheidung und Interpretation

   Da $|t| = 1,021 < 2$ ist, kann H_0 nicht abgelehnt werden. (Bei Ablehnung von H_0 würde man mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer als 4,55% ist, einen Fehler begehen.) D.h. Bei diesem Stichprobenumfang und dem vorgegebenen Signifikanzniveau kann die Hypothese, dass 40% der Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs die Mathenote 3 haben, *nicht* widerlegt werden.

ÜA 28: Bsp. für einen Einstichprobentest für das arithmetische Mittel (vgl. Test 1, Buch, Seite 184, FS, Seite 26/27)

Überprüfen Sie die Behauptung der ÜA 22: „Studierende der Fakultät Wirtschaft der DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27 € für Kopien aus bei einer Standardabweichung von 10 €“ mit einem Hypothesentest in 5 Schritten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$ durch die Zufallsstichprobe im Umfang $n = 500$ mit dem Ergebnis $\bar{x} = 28$.

1. Nullhypothese und Gegenhypothese (Bei dieser Aufgabenstellung ist das Ziel, H_0 nicht ablehnen zu können!)

   H_0: $\mu = \mu_0 = 27$ (vgl. FS, Seite 24 mittlere Grafik)

   H_1: $\mu \neq \mu_0 = 27$

2. Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

3. Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) und Ablehnungsbereich (Test 1 FS, Seite 27)

$$\alpha = 0,0455 \implies z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,97725} = 2 \implies \text{Ablehnungsbereich: } |t| > 2$$

4. Stichprobenziehung: $n = 500$ mit $\bar{x} = 28$ und Wert der Testfunktion:

$$t = \frac{28-27}{10}\sqrt{500} = 2,236$$

5. Entscheidung und Interpretation

Da $|t| = 2,236 > 2$ ist, kann H_0 abgelehnt werden (anders ausgedrückt: H_0 ist widerlegt). D.h.: Die Behauptung, Studierende der Fakultät Wirtschaft der DHBWs geben im Durchschnitt pro Semester 27 € für Kopien aus bei einer Standardabweichung von 10 €, ist *nicht* haltbar.

ÜA 29: Bsp. für einen Zweistichprobentest für die Differenz zweier Anteilswerte[13]

Der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der DHBW Stuttgart (π_1) ist größer als der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der DHBW Mannheim (π_2). Die Überprüfung erfolgt durch zwei Zufallsstichproben mit $n_1 = 380$ und $n_2 = 400$ und den Ergebnissen:

$p_1 = 0,43$ und $p_2 = 0,37$.

Führen Sie einen Hypothesentest in fünf Schritten durch bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$.

1. Nullhypothese (Ziel H_0 ablehnen!) und Gegenhypothese

H_0: $\pi_1 \leq \pi_2$

H_1: $\pi_1 > \pi_2$

2. Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{P_1 - P_2}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 P_1(1-P_1) + n_2 P_2(1-P_2)}{n_1 + n_2 - 2}$$

3. Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) und Ablehnungsbereich

$$\alpha = 0,0455 \implies z_{1-0,0455} = 1,69 \implies \text{Ablehnungsbereich: } t > 1,69$$

4. Stichprobenziehung: $n_1 = 380$ mit $p_1 = 0,43$ und $n_2 = 400$ mit $p_2 = 0,37$ und Bestimmung des Wertes der Testfunktion:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 p_1(1-p_1) + n_2 p_2(1-p_2)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{380 \cdot 0,43 \cdot 0,57 + 400 \cdot 0,37 \cdot 0,63}{778} = 0,24$$

$$\implies t = \frac{0,43 - 0,37}{\sqrt{\frac{0,24 \cdot 780}{152\,000}}} = 1,71$$

[13] Beachte: Bei Bleymüller (2015), Seite 112, wird eine andere Formel für die Testfunktion verwendet. Das Ergebnis der Testfunktion im 4. Schritt des Hypothesentests mit der Formel von Bleymüller weicht aber nur unwesentlich in der 4. Stelle hinter dem Komma von dem hier hergeleiteten Ergebnis ab!

5. Entscheidung und Interpretation

   Da $t = 1,71 > 1,69$ ist, kann H_0 abgelehnt werden. D.h. aufgrund der Stichprobe begeht man mit der Behauptung H_1, dass der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der DHBW Stuttgart größer ist als der Anteil der Studierenden mit Mathenote 3 der DHBW Mannheim, mit einer maximalen Wahrscheinlichkeit von 4,55% einen Fehler.

ÜA 30: Bsp. für einen Zweistichprobentest für die Differenz zweier arithmetischer Mittel (vgl. Test 2, Buch, Seite 184, FS, Seite 27)

Studierende der DHBW Mannheim geben pro Semester weniger für Kopien aus (μ_1) als Studierende der DHBW Stuttgart (μ_2) bei gleicher Varianz. Die Überprüfung erfolgt durch zwei Zufallsstichproben mit $n_1 = 380$ und $n_2 = 400$ und den Ergebnissen:

$\bar{x}_1 = 27,\ s_1^2 = 100$ und $\bar{x}_2 = 28,\ s_2^2 = 108$.

Führen Sie einen Hypothesentest in fünf Schritten durch bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,0455$.

1. Nullhypothese (Ziel H_0 ablehnen!) und Gegenhypothese

   H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$

   H_1: $\mu_1 < \mu_2$

2. Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

3. Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) und Ablehnungsbereich (Test 2 FS, Seite 27)

$$\alpha = 0,0455 \implies z_{1-0,0455} = 1,69 \implies \text{Ablehnungsbereich: } t < -1,69$$

4. Stichprobenziehung: $n_1 = 380$ mit $\bar{x}_1 = 27,\ s_1^2 = 100$ und $n_2 = 400$ mit $\bar{x}_2 = 28,\ s_2^2 = 108$ und Bestimmung des Wertes der Testfunktion:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{379 \cdot 100 + 399 \cdot 108}{778} = 104,1 \implies$$

$$t = \frac{27-28}{\sqrt{\frac{104,1 \cdot 780}{152\,000}}} = -1,37$$

5. Entscheidung und Interpretation

   Da $t = -1,37 > -1,69$ ist, kann H_0 nicht abgelehnt werden. D.h. bei diesem Stichprobenumfang und dem vorgegebenen Signifikanzniveau kann die Hypothese H_0, dass Studierende der DHBW Mannheim pro Semester gleich viel oder mehr für Kopien ausgeben als Studierende der DHBW Stuttgart, *nicht* widerlegt werden. (Bei Ablehnung von H_0, d.h. mit der Behauptung H_1, würde man mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer als 4,55% ist, einen Fehler begehen.)

- Signifikant bedeutet nicht „wesentlich“ in einem Sachzusammenhang, sondern nur, dass der Unterschied nicht zufällig ist. Diese Aussage ist abhängig vom (Buch, Seite 171)
  - gewählten Testverfahren
  - Stichprobenumfang
  - Signifikanzniveau.

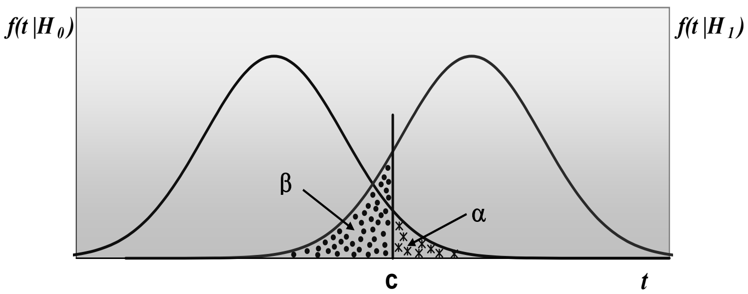
- Die Irrtumswahrscheinlichkeit bildet nur das Risiko ab, eine richtige Hypothese (H_0) mit dem gewählten Verfahren fälschlicherweise zu widerlegen. Dies ist dann problematisch, wenn
  - in diesem Fall Anstrengungen unternommen würden, die Widerlegung zu erhöhen (α würde dadurch noch kleiner), aber
  - keine Anstrengungen unternommen würden, wenn H_0 fälschlicherweise nicht widerlegt würde, aber dieser Fehler, der unbekannt ist, schlimmer wäre.

Fehlermöglichkeiten bei Tests

Testentscheidung	tatsächlicher Zustand	
	H_0 richtig	H_0 falsch
H_0 nicht abgelehnt	richtige Entscheidung (Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$)	Fehler 2. Art (Wahrscheinlichkeit β)
H_0 abgelehnt	Fehler 1. Art (Wahrscheinlichkeit α)	richtige Entscheidung (Wahrscheinlichkeit $1-\beta$)

Der Fehler 1. Art wird aus der Testverteilung bei Gültigkeit von H_0, der Fehler 2. Art aus der Testverteilung bei Gültigkeit einer Alternativhypothese H_1 abgeleitet.[14] Bei einem einseitigen Test mit z.B. H_0: $\mu \le \mu_0$ und H_1: $\mu \ge \mu_1$ ergäben sich dann folgende Verteilungen:

Fehler 1. und 2. Art



[14] Beachte Buch, Seite 175: Bei wissenschaftlichen Anwendungen ist die Formulierung einer Gegenhypothese oft nicht sachgemäß …, d.h. H_1 kann hier selten als Punkthypothese (klassischer Alternativtest) formuliert werden.

Bei Vorgabe von α (d.h. beim klassischen Signifikanztest) liegt β fest und auch der kritische Wert c, der das Ergebnis H_0 bzw. H_1 (d.h. den Ablehnungsbereich bei gegebener Testfunktion und ihrer Verteilung) zuordnet. Würde c vorgegeben, wären beide Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β vorbestimmt, wie z.B. in der Qualitätskontrolle.

β hängt von einer Alternativhypothese H_1 ab. Für konstante Werte μ_0 und σ kann β in Abhängigkeit

- von α: je kleiner α, desto größer ist β (siehe obig Grafik)
- von $\mu_1 - \mu_0$: je größer die Differenz, desto kleiner ist β (vgl. Grafiken FS, Seite 25)
- von n: je größer n, desto geringer ist $\sigma_{\bar{x}}$, desto geringer wird also β (vgl. Grafiken FS, Seite 25)

gesehen werden, d.h. $\beta = \beta(\alpha, \mu_1 - \mu_0, n)$. Vgl. FS, Seite 25:

$(1-\beta)$ wird als „Macht“ – β als „Operationscharakteristik“ (OC-Kurve) – eines Tests bezeichnet und gilt als Auswahlkriterium: Hat man bei vorgegebenem α die Wahl zwischen verschiedenen Testverfahren, die dieses α einhalten, so wird man jenes mit der größten Macht wählen.

ÜA 31: Bsp. für den Fehler 1. und 2. Art

Die durchschnittlichen Ausgaben für Kopien von Studierenden der Fakultät Wirtschaft der DHBWs betragen pro Semester $\mu_0 = 27$ € bei einer Standardabweichung von $\sigma = 10$. Wir prüfen die Behauptung H_0: „Die Durchschnittsausgaben pro Semester sind kleiner gleich 27 €“ durch Zufallsstichproben vom Umfang $n = 100\;\; (200,\;\; 400)$ bei einer Wahrscheinlichkeit von $(1-\alpha) = 0,9545$.

Wie groß ist der β-Fehler bei der Alternativhypothese H_1: „Die Durchschnittsausgaben pro Semester sind größer gleich 29 €“?

$H_0:\; \mu \le \mu_0 = 27$ und $(1-\alpha) = 0,9545 \;\Longrightarrow\; z = 1,69$ (FS, Test 1, FS, Seite 27, Grafik: FS, Seite 25)

Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

a) $n = 100,\; \sigma = 10 \;\Longrightarrow\; \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{100}} = 1.$

Bestimme den Annahmebereich:

$$1,69 \ge t = \frac{\bar{x} - 27}{1} \;\Longrightarrow\; \bar{x} \le 28,69 \;\Longrightarrow\; c = 28,69 \;\Longrightarrow$$

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, wird aber wegen eines Stichprobenergebnisses $\bar{x} > 28,69$ € abgelehnt. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler 1. Art zu begehen, beträgt maximal $\alpha = 0,0455$, d.h. 4,55%.

$H_1:\; \mu \ge \mu_0 = 29$ und $c = 28,69 \;\Longrightarrow$

$$t = \frac{28,69 - 29}{1} = -0,31, \text{ d.h. } t < -0,31 = -z_{1-\alpha}$$ (Test 1, FS, Seiete 27)

$$z_{1-\alpha} = 0,31 \overset{\text{FS,S.37}}{\Longrightarrow} (1-\beta) = 0,6217 \;\Longrightarrow\; \beta = 0,3783 \;\Longrightarrow$$

Fehler 2. Art: H_0 trifft nicht zu, wird aber aufgrund der Ablehnung der Alternativhypothese H_1 wegen eines Stichprobenergebnisses $\bar{x} < 28,69$ € angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler 2. Art zu begehen, beträgt maximal $\beta = 0,3783$, d.h. 37,83%. (Vergleichbares Bsp. FS, Seite 25 linke Grafik!)

b) $n = 200,\ \sigma = 10 \implies \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{200}} = 0,707.$

Bestimme den Annahmebereich:

$$1,69 \geq t = \frac{\bar{x} - 27}{0,707} \implies \bar{x} \leq 28,195 \implies c = 28,195 \implies$$

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, wird aber wegen eines Stichprobenergebnisses $\bar{x} > 28,2$ € abgelehnt. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler 1. Art zu begehen, beträgt maximal $\alpha = 0,0455$, d.h. 4,55%.

$H_1:\ \mu \geq \mu_0 = 29$ und $c = 28,195 \implies$

$$t = \frac{28,195 - 29}{0,707} = -1,138, \text{ d.h. } t < -1,138 = -z_{1-\alpha} \quad \text{(Test 1, FS, Seiete 27)}$$

$$z_{1-\alpha} = 1,138 \overset{\text{FS,S.37}}{\implies} (1-\beta) = 0,872 \implies \beta = 0,128 \implies$$

Fehler 2. Art: H_0 trifft nicht zu, wird aber aufgrund der Ablehnung der Alternativhypothese H_1 wegen eines Stichprobenergebnisses $\bar{x} < 28,19$ € angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler 2. Art zu begehen, beträgt maximal $\beta = 0,128$, d.h. 12,8%. (Vergleichbares Bsp. FS, Seite 25 mittlere Grafik!)

c) $n = 400,\ \sigma = 10 \implies \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{400}} = 0,5.$

Bestimme den Annahmebereich:

$$1,69 \geq t = \frac{\bar{x} - 27}{0,5} \implies \bar{x} \leq 27,845 \implies c = 27,845 \implies$$

Fehler 1. Art: H_0 trifft zu, wird aber wegen eines Stichprobenergebnisses $\bar{x} > 27,85$ € abgelehnt. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler 1. Art zu begehen, beträgt maximal $\alpha = 0,0455$, d.h. 4,55%.

$H_1:\ \mu \geq \mu_0 = 29$ und $c = 27,845 \implies$

$$t = \frac{27,845 - 29}{0,5} = -2,31, \text{ d.h. } t < -2,31 = -z_{1-\alpha} \quad \text{(Test 1, FS, Seiete 27)}$$

$$z_{1-\alpha} = 2,31 \overset{\text{FS,S.37}}{\implies} (1-\beta) = 0,9896 \implies \beta = 0,0104 \implies$$

Fehler 2. Art: H_0 trifft nicht zu, wird aber aufgrund der Ablehnung der Alternativhypothese H_1 wegen eines Stichprobenergebnisses $\bar{x} < 27,84$ € angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler 2. Art zu begehen, beträgt maximal $\beta = 0,0104$, d.h. 1,04%. (Vergleichbares Bsp. FS, Seite 25 reche Grafik!)

ÜA 32: Bsp. für den Test der Hypothese H_0 gegen eine Alternativhypothese H_1

Eine Stichprobe von 1 000 Studierenden der Fakultät Technik ergab 350 Studierende mit der Mathenote 3.

Bei einem Prozentsatz von 40% oder mehr Studierenden mit Mathenote 3 sollen Stützkurse, bei einem Prozentsatz von 30% oder weniger Tüftelkurse angeboten werden.

Prüfen Sie die Hypothese H_0: „Unter den Studierenden der Fakultät Technik gibt es 30% oder weniger mit Mathenote 3“ gegen die Alternativhypothese H_1: „Unter den Studierenden der Fakultät Technik gibt es 40% oder mehr mit Mathenote 3“.

I) α-Fehler

1. Nullhypothese

H_0: $\pi \leq \pi_0 = 0,3$ (vgl. FS, Seite 24 rechte Grafik)

2. Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

3. Stichprobenergebnis: $p = 0,35$:

$$z = \frac{0,35 - 0,3}{\sqrt{0,3 \cdot 0,7}}\sqrt{1\,000} = 3,450 \implies \alpha\% = 0,03\%$$

4. Interpretation

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist bei der Widerlegung von H_0 sehr klein, d.h. 35% Studierende mit Mathenote 3 sind bei einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit 30% Mathenote 3 sehr unwahrscheinlich $\implies$ keine Tüftelkurse erforderlich.

II) β-Fehler

1. Alternativhypothese

H_1: $\pi \geq \pi_0 = 0,4$ (vgl. FS, Seite 24 linke Grafik)

2. Testfunktion und Testverteilung

$$T = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

3. Stichprobenergebnis: $p = 0,35$:

$$z = \frac{0,35 - 0,4}{\sqrt{0,4 \cdot 0,6}}\sqrt{1\,000} = -3,227 \implies \beta\% = 0,06\%$$

4. Interpretation

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist bei der Widerlegung von H_1 sehr klein, d.h. 35% Studierende mit Mathenote 3 sind bei einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit 40% Mathenote 3 sehr unwahrscheinlich $\implies$ keine Stützkurse erforderlich.

Würde man *vor* der Stichprobenziehung jeweils für H_0 und H_1 eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% (also $\alpha = \beta = 0,01$) zulassen, dann wäre $z_{1-0,01} = 2,326 \implies$ Ablehnungsbereich für H_0 wäre $t > 2,326$ und Ablehnungsbereich für H_1 wäre $t < -2,326$, d.h.: Da $t = 3,450 > 2,326 = z_{1-0,01}$ bzw. $t = -3,227 < -2,326 = -z_{1-0,01}$ gilt, können sowohl die H_0- als auch die H_1-Hypotehese abgelehnt werden, d.h. das Stichprobenergebnis $p = 0,35$ spricht weder für H_0 noch für H_1. Da beim Ergebnis $p = 0,35$ aber gilt: $\alpha\% = 0,03\% < 0,06\% = \beta\%$, könnte man daraus ableiten, wenn schon, dann eher H_1 als H_0 zuzustimmen, da man bei Ablehnung von H_1 einen größeren Fehler begehen würde.

6 Wirtschaftsstatistische Anwendungen

6.7 Stichproben im Rechnungswesen, Stichprobeninventur

Die Stichprobeninventur (Buch, Kapitel 6.7, Seite 251f, FS, Seite 35) soll Informationen zum Wert des Vermögens am Bilanzstichtag liefern. Gemäß der Darstellung im Kapitel 5.2.1 und 5.2.2 (Buch, Seite 144 – 162, FS, Seite 21/22) wird eine Stichprobenplanung und -auswertung vorgenommen.

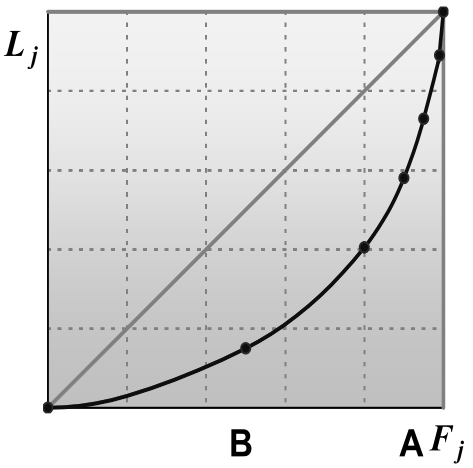
Das cut-off-Verfahren ist ein Standardverfahren, um den Stichprobenumfang auf die „wesentlichen“ Fälle zu reduzieren. Für eine quantitative Größe kann die Wesentlichkeit mit der ABC-Analyse gemessen werden.

ÜA 33: Für die Stichprobenplanung einer einfachen Zufallsstichprobe stehen folgende Buchwerte als Planwerte zur Verfügung:

Werte von … bis unter … $[a_j, b_j)$ €	Anzahl Positionen h_j	Gesamtwert $\sum_j x_j$	Summe der quadrierten Werte $\sum_j x_j^2$	kumul. relative Anzahl F_j	kumul. rel. Merkmalssumme L_j	Varianz $\sigma_j'^2$
0 – 20	5 000	60 000	845 000	0,50	0,150	25
20 – 50	3 000	102 000	3 693 000	0,80	0,405	75
50 – 100	1 000	70 000	5 100 000	0,90	0,580	200
100 – 150	500	60 000	7 290 000	0,95	0,730	180
150 – 200	400	64 000	10 300 000	0,99	0,890	150
200 u. mehr	100	44 000	21 360 000	1,00	1,000	20 000
Σ	10 000	400 000	48 588 000	–	–	–

Führen Sie mit Hilfe der Lorenzkurve eine ABC-Analyse durch (vgl. Kapitel 6.1 Buch, Seite 190f, FS, Seite 28) und bestimmen Sie für entsprechende cut-off-Werte den notwendigen Stichprobenumfang, wenn der Stichprobenfehler bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45 % nicht größer als 2 % sein soll. Ist eine einfache Zufallsstichprobe sinnvoll?

Lorenzkurve



Summe der quadrierten Werte nach „Abschneiden“:

	bei 100 €	bei 200 €	nicht
845 000			
3 693 000			
5 100 000	9 638 000		
7 290 000			
10 300 000		27 228 000	
21 360 000			48 588 000

(grafische Darstellung unter der Annahme einer Rechteck-Rechteck-Verteilung)

notwendiger Stichprobenumfang (Buch, Seite 155, FS, Seite 21) für $e'_r = 0,02$ (2 %):

$$n \geq N\left(1 + \frac{Ne'^2_r}{z^2 V'^2}\right)^{-1}$$

- ohne Abschneiden: $\mu' = \frac{400\,000}{10000} = 40, \quad \sigma'^2 = \frac{48\,588\,000}{10000} - 40^2 = 3\,258,8,$

  $V'^2 = \frac{3\,258,8}{40^2} = 2,037,$

  $n \geq 10000\left(1 + \frac{10000 \cdot 0,02^2}{4 \cdot 2,037}\right)^{-1} = 10000\left(1 + \frac{4}{4 \cdot 2,037}\right)^{-1} \approx 6\,708.$

- cut off bei 200 €: $\mu' = \frac{356\,000}{9900} = 35,96, \quad \sigma'^2 = \frac{27\,228\,000}{9900} - 35,96^2 = 1\,457,2,$

  $V'^2 = \frac{1\,457,2}{35,96^2} = 1,127,$

  $n \geq 9\,900\left(1 + \frac{9\,900 \cdot 0,02^2}{4 \cdot 1,127}\right)^{-1} = 9\,900\left(1 + \frac{3,96}{4 \cdot 1,127}\right)^{-1} \approx 5\,271$

  (insgesamt 5 371).

- cut off bei 100 €: $\mu' = \frac{232\,000}{9000} = 25,78, \quad \sigma'^2 = \frac{9\,638\,000}{9\,000} - 25,78^2 = 406,4,$

  $V'^2 = \frac{406,4}{25,78^2} = 0,612,$

  $n \geq 9\,000\left(1 + \frac{9\,000 \cdot 0,02^2}{4 \cdot 0,612}\right)^{-1} = 9\,000\left(1 + \frac{3,6}{4 \cdot 0,612}\right)^{-1} \approx 3\,642$

  (insgesamt 4 642).

Da bei der cut-off-Grenze von 200 € auf 99 % der Inventarposten ein Anteil von 89 % des Gesamtwertes des Inventars fällt, bietet sich ein Abschneiden bei 200 € an und damit ein Stichprobenumfang von $n = 5\,271$ (insgesamt $n = 5\,371$). Allerdings ist eine einfache Zufallsstichprobe nicht sinnvoll, weil mit Zufallsfehlern gerechnet werden muss, z. B. einer überproportionalen Anzahl von Elementen in einer der 5 Schichten. Daher wäre eine Vollerhebung ($N = 9\,900$) oder eine geschichtete Zufallsstichprobe zu empfehlen.

ÜA 34: Bestimmen Sie für die Stichprobenplanung einer geschichteten Zufallsstichprobe mit den Buchwerten der ÜA 33 die notwendigen Stichprobenumfänge bei proportionaler Aufteilung, wenn der Stichprobenfehler bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45 % nicht größer als 2 % sein soll. Nehmen Sie die Berechnung für den Fall „ohne Abschneiden" sowie für die cut-off-Grenzen 200 €, 150 € und 100 € vor. Welche cut-off-Grenze wäre sinnvoll?

Notwendiger Umfang bei proportionaler Aufteilung (Buch, Seite 159, FS, Seite 22):

$$n \geq z^2 \frac{\sum N_h \sigma_h'^2}{N e'^2} \qquad \text{(m. Z.)}$$

$$n \geq \frac{\sum \sigma_h'^2 \left(\frac{N_h}{N}\right)}{\frac{e'^2}{z^2} + \sum \frac{N_h}{N^2} \sigma_h'^2} \qquad \text{(o. Z.)}$$

- ohne Abschneiden $(L = 6)$ $|e'| = e_r' \cdot \mu' = 0,02 \cdot 40 = 0,8$

$$n \geq 4 \cdot \frac{270}{0,64} \approx 1\,688 \quad \text{(m. Z.)}, \qquad n \geq \frac{270}{\frac{0,64}{4} + \frac{270}{10\,000}} \approx 1\,444 \quad \text{(o. Z.)}$$

- cut off bei 200 € $(L = 5)$ $|e'| = 0,02 \cdot 35,96 = 0,7192$

$$n \geq 4 \cdot \frac{70,71}{0,517} \approx 547 \quad \text{(m. Z.)}, \qquad n \geq \frac{70,71}{\frac{0,517}{4} + \frac{70,71}{9\,900}} \approx 519 \quad \text{(o. Z.)}$$

(insgesamt 647 bzw. 619)

- cut off bei 150 € $(L = 4)$ $|e'| = 0,02 \cdot 30,74 = 0,6147$

$$n \geq 4 \cdot \frac{67,37}{0,378} \approx 714 \quad \text{(m. Z.)}, \qquad n \geq \frac{67,37}{\frac{0,378}{4} + \frac{67,37}{9\,500}} \approx 664 \quad \text{(o. Z.)}$$

(insgesamt 1 214 bzw. 1 164)

- cut off bei 100 € $(L = 3)$ $|e'| = 0,02 \cdot 25,78 = 0,5156$

$$n \geq 4 \cdot \frac{61,11}{0,266} \approx 920 \quad \text{(m. Z.)}, \qquad n \geq \frac{61,11}{\frac{0,266}{4} + \frac{61,11}{9\,000}} \approx 835 \quad \text{(o. Z.)}$$

(insgesamt 1 920 bzw. 1 835).

Nach dieser „Iteration" wäre eine cut-off-Grenze bei 200 € „optimal", da hier der kleinste Stichprobenumfang $n = 547$ (insgesamt $n = 647$) bzw. $n = 519$ (insgesamt $n = 619$) notwendig wäre. Für eine proportionale Aufteilung ergibt sich für die $L = 5$ Schichten:

Schicht h	Werte von … bis unter … $[a_h, b_h)$ €	Anzahl Positionen N_h	Stichprobenumfang für $n = 547$ n_h	Stichprobenumfang für $n = 519$ n_h
1	0 – 20	5 000	$\frac{50}{99} \cdot 547 \approx 277$	$\frac{50}{99} \cdot 519 \approx 263$
2	20 – 50	3 000	$\frac{30}{99} \cdot 547 \approx 166$	$\frac{30}{99} \cdot 519 \approx 158$
3	50 – 100	1 000	$\frac{10}{99} \cdot 547 \approx 56$	$\frac{10}{99} \cdot 519 \approx 53$
4	100 – 150	500	$\frac{5}{99} \cdot 547 \approx 28$	$\frac{5}{99} \cdot 519 \approx 27$
5	150 – 200	400	$\frac{4}{99} \cdot 547 \approx 23$	$\frac{4}{99} \cdot 519 \approx 21$
Σ	–	9 900	550	522

Allerdings kann auch eine Vollerhebung in jeder der 5 Schichten sinnvoll sein.

ÜA 35: Bei der Stichprobeninventur in dem Unternehmen mit den Buchwerten der ÜA 33 wird folgendermaßen verfahren. Die Schätzung des Gesamtwertes der 10 000 Positionen erfolgt über eine geschichtete Zufallsstichprobe bei proportionaler Aufteilung. Der zulässige Stichprobenfehler darf bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95,45 % nicht mehr als 2 % betragen.

Man erhält folgende Ergebnisse der Stichprobenziehung ($n = 1\,700$):

Schicht h	N_h	n_h	$\sum_{i=1}^{n_h} x_{ih}$	$\sum_{i=1}^{n_h} x_{ih}^2$
1	5 000	850	11 050	152 140
2	3 000	510	16 830	576 768
3	1 000	170	11 560	804 670
4	500	85	10 200	1 231 308
5	400	68	11 900	2 089 334
6	100	17	6 800	2 800 000
Σ	10 000	1 700	68 340	7 654 220

Schätzen Sie den Gesamtwert und den Stichprobenfehler.

h	N_h	n_h	$\sum_{i=1}^{n_h} x_{ih}$	$\sum_{i=1}^{n_h} x_{ih}^2$	$\bar{x}_h$	s_h^2	$N_h s_h^2$
1	5 000	850	11 050	152 140	13	10	50 000
2	3 000	510	16 830	576 768	33	42	126 000
3	1 000	170	11 560	804 670	68	110	110 000
4	500	85	10 200	1 231 308	120	87	43 500
5	400	68	11 900	2 089 334	175	102	40 800
6	100	17	6 800	2 800 000	400	5 000	500 000
$\sum$	10 000	1 700	68 340	7 654 220	–	–	870 300

Geschätzter Gesamtwert:

$$\hat{x} = \frac{N}{n} \sum_i \sum_h x_{ih} = \frac{10\,000}{1\,700} \cdot 68\,340 = 402\,000$$

Varianz des Gesamtwertes:

$$s^2 = \frac{N}{n} \sum_h N_h s_h^2 = \frac{10\,000}{1\,700} \cdot 870\,300 = 5\,119\,411{,}76$$

Aussagewahrscheinlichkeit:

$$p = 0{,}9545 \implies z = 2$$

Stichprobenfehler des Gesamtwertes:

$$|\hat{e}| = z \cdot s = 2 \cdot \sqrt{5\,119\,411{,}76} = 4\,525{,}223 \implies$$

$$e\,\% = \frac{|\hat{e}|}{\hat{x}} \cdot 100 = \frac{4\,525{,}223}{402\,000} \cdot 100 \approx 1{,}13\,\%$$