Häufig angewandte Prognoseverfahren mit exponentieller Glättung für eine Zeitreihe (x_t), $t=1,2,\ldots,T$

Prognoseverfahren	Mathematisches Modell	geglättete Werte	Prognosewert	Initialisierung z.B.	Interpretation / Anwendung
Exponentielle Glättung 1. Ordnung	$x_t = a_t + u_t$ x_t : Beobachtungswert a_t : Niveauwert u_t : Störterm	$\bar{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\bar{x}_{t-1}$ $\bar{x}_t$: geschätzter Niveauwert α : Glättungsparameter mit $0<\alpha\le 1$	$x^*_{t+1} = \bar{x}_t$ $= \alpha x_t + (1-\alpha)x^*_t$ $x^*_{T+m} = x^*_{T+1},\ m\ge 1$	$x^*_1 = x_1$ für $x^*_{t+1} = \alpha\sum_{i=0}^{t-1}(1-\alpha)^i x_{t-i}$ $+(1-\alpha)^t x^*_1$	Je höher α gewählt wird, desto stärker reagiert die Prognose auf aktuelle Werte und desto weniger wird geglättet.
Exponentielle Glättung 2. Ordnung bzw. **Trendkorrekturversion (Modell von Brown)**	$x_t = a_t + b_t t + u_t$ x_t : Beobachtungswert a_t : Niveauwert b_t : Trendanstieg/abstieg u_t : Störterm	$\bar{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\bar{x}_{t-1}$ $\bar{\bar{x}}_t = \alpha\bar{x}_t + (1-\alpha)\bar{\bar{x}}_{t-1}$ α : Glättungsparameter, $0<\alpha\le 1$	$x^*_{t+1} = 2\bar{x}_t - \bar{\bar{x}}_{t-1}$ $x^*_{T+m} = 2\bar{x}_T - \bar{\bar{x}}_{T-1} +$ $(m-1)\alpha(\bar{x}_T - \bar{\bar{x}}_{T-1}), m\ge 2$	$\bar{x}_2 = x_2$ $\bar{\bar{x}}_1 = x_1$	Die erste Version schreibt die Modellparameter bei der Glättung einfach fort, während die zweite äquivalente Version den Niveauwert und den Trendanstieg/abstieg glättet und in der Prognose eine Trendkorrektur vornimmt.
		$\bar{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\bar{x}_{t-1}$ $\bar{\bar{x}}_t = \alpha(\bar{x}_t - \bar{x}_{t-1}) + (1-\alpha)\bar{\bar{x}}_{t-1}$ $\bar{x}_t$: geschätzter Niveauwert $\bar{\bar{x}}_t$: geschätzter Trendanstieg/abstieg α : Glättungsparameter, $0<\alpha\le 1$	$x^*_{t+1} = \bar{x}_t + \bar{\bar{x}}_t + \frac{1-\alpha}{\alpha}\bar{\bar{x}}_t$ $x^*_{T+m} = \bar{x}_T + \bar{\bar{x}}_T\cdot m$ $+\frac{1-\alpha}{\alpha}\bar{\bar{x}}_T,\ m\ge 1$	$\bar{x}_2 = x_2$ $\bar{\bar{x}}_2 = \alpha(x_2 - x_1)$	
Lineare exponentielle Glättung von Holt-Winters	$x_t = a_t + b_t t + u_t$ x_t : Beobachtungswert a_t : Niveauwert b_t : Trendanstieg/abstieg u_t : Störterm	$\bar{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(\bar{x}_{t-1} + \bar{\bar{x}}_{t-1})$ $\bar{\bar{x}}_t = \beta(\bar{x}_t - \bar{x}_{t-1}) + (1-\beta)\bar{\bar{x}}_{t-1}$ $\bar{x}_t$: geschätzter Niveauwert $\bar{\bar{x}}_t$: geschätzter Trendanstieg/abstieg α,β : Glättungsparameter, $0<\alpha,\beta\le 1$	$x^*_{t+1} = \bar{x}_t + \bar{\bar{x}}_t$ $x^*_{T+m} = \bar{x}_T + \bar{\bar{x}}_T\cdot m,$ $m\ge 1$	$\bar{x}_2 = x_2$ $\bar{\bar{x}}_2 = x_2 - x_1$	Bereits bei der Schätzung des Niveauwertes wird der Trendanstieg/abstieg berücksichtigt. Je höher β, desto stärker reagiert die Prognose auf den aktuellen Trend.
Exponentielle Glättung des additiven saisonalen Modells von Holt-Winters	$x_t = a_t + b_t t + s_t + u_t$ x_t : Beobachtungswert a_t : Niveauwert b_t : Trendanstieg/abstieg s_t : Saisonkomponente u_t : Störterm Jede Periode hat k Unterzeiträume. P sei die Anzahl der Perioden.	$\bar{x}_t = \alpha(x_t - \check{x}_{t-k}) + (1-\alpha)(\bar{x}_{t-1} + \bar{\bar{x}}_{t-1})$ $\bar{\bar{x}}_t = \beta(\bar{x}_t - \bar{x}_{t-1}) + (1-\beta)\bar{\bar{x}}_{t-1}$ $\check{x}_t = \gamma(x_t - \bar{x}_t) + (1-\gamma)\check{x}_{t-k}$ $\bar{x}_t$: geschätzter Niveauwert $\bar{\bar{x}}_t$: geschätzter Trendanstieg/abstieg $\check{x}_t$: geschätzte Saisonkomponente $\check{x}_t = \check{x}_j,\ j=1,\ldots,k$ und $t = j, j+k, j+2k,\ldots,j+(P-1)k$ α,β,γ : Glättungsparameter mit $0<\alpha,\beta,\gamma\le 1$	$x^*_{t+1} = \bar{x}_t + \bar{\bar{x}}_t + \check{x}_{t+1-k}$ $x^*_{T+m} = \bar{x}_T + \bar{\bar{x}}_T\cdot m$ $+\check{x}_{T+m-r}$ $r = \begin{cases} k & \text{für } m=1,\ldots,k \\ 2k & \text{für } m=k+1,\ldots,2k \\ 3k & \text{für } m=2k+1,\ldots,3k \\ \vdots & \end{cases}$	$\bar{x}_{k+1} = x_{k+1}$ $\bar{\bar{x}}_{k+1} = \frac{x_{k+1} - x_1}{k}$ $\check{x}_t = x_t - (\bar{\bar{x}}_{k+1}\cdot t$ $+x_1 - \bar{\bar{x}}_{k+1}),$ $t = 1,\ldots,k$	Bei einer Zeitreihe mit variierender Tendenz und saisonalen über die Zeit stabilen Schwankungen. Je höher α bzw. β bzw. γ gewählt wird, desto stärker reagiert die Prognose auf aktuelle Werte bzw. die aktuelle Tendenz bzw. die aktuellen saisonalen Schwankungen.
Exponentielle Glättung des multiplikativen saisonalen Modells von Holt-Winters	$x_t = (a_t + b_t t)s_t + u_t$ Variablendefinition vgl. additives Modell	$\bar{x}_t = \alpha\frac{x_t}{\check{x}_{t-k}} + (1-\alpha)(\bar{x}_{t-1} + \bar{\bar{x}}_{t-1})$ $\bar{\bar{x}}_t = \beta(\bar{x}_t - \bar{x}_{t-1}) + (1-\beta)\bar{\bar{x}}_{t-1}$ $\check{x}_t = \gamma\frac{x_t}{\bar{x}_t} + (1-\gamma)\check{x}_{t-k}$ Variablendefinition vgl. additives Modell	$x^*_{t+1} = (\bar{x}_t + \bar{\bar{x}}_t)\check{x}_{t+1-k}$ $x^*_{T+m} = (\bar{x}_T + \bar{\bar{x}}_T m)\check{x}_{T+m-r}$ $r = \begin{cases} k & \text{für } m=1,\ldots,k \\ 2k & \text{für } m=k+1,\ldots,2k \\ 3k & \text{für } m=2k+1,\ldots,3k \\ \vdots & \end{cases}$	$\bar{x}_{k+1} = x_{k+1}$ $\bar{\bar{x}}_{k+1} = \frac{x_{k+1} - x_1}{k}$ $\check{x}_t = \frac{x_t}{\bar{\bar{x}}_{k+1}\cdot t + x_1 - \bar{\bar{x}}_{k+1}},$ $t = 1,\ldots,k$	Bei einer Zeitreihe mit variierender Tendenz und saisonalen über die Zeit variierenden Schwankungen (z.B.: Je größer der Abstand zwischen den Beobachtungen, desto höher die saisonale Komponente).